

福岡工業大学 学術機関リポジトリ

点部分集合に関する拡大構成問題

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2021-03-02 キーワード (Ja): キーワード (En): 2-edge-connected graph, 3-edge-connected graph, strong connected digraph and 3-(2-) edge-component condensation for a specified vertex-set 作成者: 高橋, 昌也 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/11478/00001678

点部分集合に関する拡大構成問題

高橋 昌也 (福岡工業短期大学電子情報学科)

Augmentation Problems for a Specified Vertex-Set

Masaya TAKAHASHI (Department of Electronics and Information Science, Fukuoka J. College of Technology)

Abstract

A (directed) graph $G=(V, E)$ is k -edge-connected with respect to a vertex-set $V' \subset V$ if and only if there are k edge-disjoint $u-v$ paths for any two vertices $u, v \in V'$ (there are k edge-disjoint directed paths from u to v and k edge-disjoint directed paths from v to u respectively, for directed version). The k -edge-connected augmentation problem for a specified vertex-set is: Given a (directed) graph $G_0=(V_0, E_0)$, find a smallest (directed) edge-set A such that $G=(V_0, E_0 \cup A)$ is k -edge-connected with respect to some vertex-set $V' \subset V_0$. In this paper, I will propose the following results: The strong connected augmentation problem for a specified vertex-set is NP-complete, and an algorithm for solving the k -edge-connected one for a specified vertex-set with $k=2, 3$ cases.

Key words: 2-edge-connected graph, 3-edge-connected graph, strong connected digraph and 3-(2-) edge-component condensation for a specified vertex-set.

1. はじめに

現代社会における情報通信のもつ重みはコンピュータ・ネットワークの発展によって日々大きくなっている。よって、ネットワーク障害の発生による、一部または全体の通信不能状態の露呈において、その及ぼす影響は計り知れない。

本論文で扱う拡大構成問題は、既存の通信網や計算機ネットワーク等の信頼性・耐故障性を効率よく向上させるために、付加する通信路を決定する問題を形式化したものであり、ネットワーク障害の回避の基礎となる。

また、「ネットワーク全体の信頼性・耐故障性の向上はコストの面で無理だが、重点となる交換機・計算機

どおしの通信に関する信頼性・耐故障性は効率よく向上させたい」という要求もある。そのような問題に対して、重点となる交換機・計算機をグラフの点に対応させた、点部分集合に関する拡大構成問題として形式化するものである。

さらに、既存のネットワークの通信路が双方向の場合は無向グラフを、片方向の場合は有向グラフを対象とし、付加する通信路のコストが場所によって著しく異なる場合は、重み付きのグラフを対象として形式化する。また、通信路の障害に対する信頼性・耐故障性の向上に関しては、辺連結度に関する拡大構成問題として形式化し、交換機・計算機の障害に対する信頼性・耐故障性の向上に関しては、点連結度に関する拡大構成問題として形式化する。このように、問題と形式化との関連において、拡大構成問題を論ずる。

まず、拡大構成問題を $(\alpha, \beta, \gamma, \Delta)$ -AP と表記する。ここで、 α は有向グラフ (D と表記) かグラフ (U と

表記) を表し, β は辺に重みがある場合 (W と表記) かない場合 (U と表記) を表し, γ は点連結度 k に関する場合 (kV と表記) か辺連結度 k に関する場合 (kE と表記) を表し, Δ は対象となる点部集合 V' について, $V' = V$ の場合 (= と表記) か $V' \subset V$ の場合 (\subset と表記) を表す。また, $\alpha, \beta, \gamma, \Delta$ のそれぞれについて, 特定しない場合は * と表記する。

拡大構成問題に対して最初, $(U, U, 2E, =) - AP$, $(D, U, 1E =) - AP$ と記述される, 無向グラフの 2 辺連結化と有向グラフの強連結化について, 線形時間アルゴリズムが Eswaran と Tarjan によって提案された¹⁾。以後, $(U, U, 2V, =) - AP$ ²⁾, $(U, U, 3E, =) - AP$ ¹⁵⁾ についての線形時間アルゴリズム, $(U, U, kE, =) - AP$ ^{6, 12)}, $(U, U, 3V, =) - AP$ ¹³⁾ についての多項式時間アルゴリズムが提案されている。特に論文 [6] では, $(k-1)$ 辺連結グラフを最小辺数で k 辺連結化する問題について報告されている。

$(*, W, *, =) - AP$ は NP 完全である¹⁾ が, $(U, W, *, =) - AP$ に関して, いくつかの多項式時間の近似アルゴリズムが報告されている^{3, 11, 14)}。また, $(D, U, *, =) - AP$ について D が有向木である場合についての線形時間アルゴリズムが提案されており^{4, 5)}, $(D, U, 2E, =) - AP$ について, D が一般の有向グラフの場合の多項式時間アルゴリズムが報告されている⁸⁾。

本論文では, 次の [1] [2] の目的のため, 以下の (2)(3) について述べる。

[1] 論文 [12] とは別に, 「与えられたグラフを最小辺数で k 辺連結化する問題」は, 論文 [6] の辺付加方法を, 付加する点を限定して, $k-1$ 回用いることにより解くことができると推測しており, それを示す糸口として $k=3$ の場合を考える。

[2] $(U, U, 2E, \subset) - AP$, $(U, U, 3E, \subset) - AP$ について, 不要な部分を取り去り, 元のグラフの性質を変化させない範囲での変形をさせたグラフ (4.1 節, 5.1 節を参照) に対して, それぞれ $(U, U, 2E, =) - AP$, $(U, U, 3E, =) - AP$ を解くアルゴリズム^{16, 17)} を適用することができることを示す。

また, 有向グラフに関しては, 点部分集合を限定すると多項式時間で解けないことを示すため, 以下の (1) について述べる。

(1) $(D, U, 1E, \subset) - AP$ は NP 完全である。

(2) $(U, U, 2E, \subset) - AP$ について, 次の (3) の解法の一助という意味も込めて, $O(n+m)$ 時間アルゴリズムを提案する。

(3) $(U, U, 3E, \subset) - AP$ について, $O(n+m)$ 時間アルゴリズムを提案する。

ただし, n はグラフの点の数, m はグラフの辺の数である。

以上の, 本論文の論考によって, 辺連結度についての拡大構成問題の解法が明確となり, これにより, 通信路の故障に対して既存の通信網や計算機ネットワーク等の信頼性・耐故障性を効率よく向上させることができる。

2. 準備

任意の有向グラフ $G=(V, E)$ と点部分集合 $V' \subset V$ について, 任意の 2 点 $u, v \in V'$ が互いに到達可能な時, G は V' -強連結であるという。

任意のグラフ $G=(V, E)$ と点部分集合 $V' \subset V$, 任意の 2 点 $u, v \in V'$ について, u から v への辺素なパスが k 本以上ある時, G は V' - k 辺連結であるという。ただし, $k \geq 1$ である。グラフ G が k 辺連結でない時, G の k 辺連結であるような極大な点部分集合のことを k 辺成分という。次数 r の k 辺成分のことを $r-k$ リーフという。

任意の実数 x について, $\lceil x \rceil$ は x の小数点以下を切上げることにより生成される整数を表し, $\lfloor x \rfloor$ は x の小数点以下を切捨てることにより生成される整数を表す。

3. 点部分集合に関する有向グラフ強連結化拡大構成問題

本章では, V' -強連結化拡大構成問題(与えられた有向グラフ G について, $G+A$ が V' -強連結であるような最小有向辺集合 A を見つける問題) について述べる。

本節では, 有向辺のことを単に辺と略する。

まず, 決定問題 P_1, P_2 を次のように定式化する。

(1) 決定問題 P_1

入力: ある要素の集合 T と, $\cup_{j=1}^r T_j = T$ となるような T の部分集合の集合 $S=(T_1, T_2, \dots, T_r)$, 非負整数 k , ただし T は有限集合である。

質問: $T = T_{j_1} \cup T_{j_2} \cup \dots \cup T_{j_p}$ であり, $|S'| \leq k$ (つまり, $p \leq k$) であるような S の部分集合 $S' = (T_{j_1}, T_{j_2}, \dots, T_{j_p})$ があるか?

出力: Yes or No

問題 P_1 はセットカバー問題といわれ, NP 完全であ

る。

(2) 決定問題 P_2

入力: 与えられた有限有向グラフ $G=(V, E)$, 点部分集合 $V' \subset V$, 非負整数 k

質問: $|A| \leq k$, かつ $G+A$ が V' -強連結であるような辺集合 A があるか?

出力: Yes or No

まず, $P_2 \in NP$ (P_2 は nondeterministic Turing machine によって, 問題のサイズに関する多項式時間で解くことができる決定問題の集合に属する) であることは以下により明らかである。

A を $|A| \leq k$ なる任意の辺集合とする。ただし, $e=(u, v) \in A$ について, $u \neq v$ である。この時, $G+A$ の全ての強連結成分は線形時間で見つけることができる²⁾ので, $G+A$ が V' -強連結かどうかは線形時間で判別される。すなわち, $P_2 \in NP$ である。

以上の前提に立って, P_1 が P_2 に多項式変換できる (P_1 のサイズの多項式時間で問題 P_2 が構成でき, また, P_1 の出力が "Yes" であるための必要十分条件は, P_2 の出力が "Yes" である) ことを次に示す。

$X=\{s_1, s_2, \dots, s_r\}$, $Y=\{t_1, t_2, \dots, t_r\}$, $T=\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ とし, $S=(T_1, T_2, \dots, T_r)$ を $T=\bigcup_{j=1}^r T_j$ となるような T の部分集合の集合とする。この時, $G=(V, E)$ を $V=X \cup Y \cup T$, $E=\bigcup_{j=1}^r E_j$ を示す有向グラフとする。ただし, $E_j=\{(s_j, v_i) | \forall v_i \in T_j\} \cup \{(v', t_j) | \forall v' \in T_j\}$ ($1 \leq j \leq r$) である。さらに, G の点部分集合を $V'=T$ とする。

この時, $G=(V, E)$ は $O(\sum_{j=1}^r |T_j|)$ 時間で構成できる。よって, G は P_1 のサイズに関する多項式時間で構成できる。

次に, P_1 が P_2 に多項式変換できることは, 以下の補題を示すことにより導かれる。

補題3.1 $G+A$ が V' -強連結であり, かつ, $|A| \leq k$ であるような辺集合 A が存在するための必要十分条件は, $T=T_{j_1} \cup T_{j_2} \cup \dots \cup T_{j_p}$ であり, かつ, $|S'| \leq k$ となるような S の部分集合 $S'=(T_{j_1}, T_{j_2}, \dots, T_{j_p})$ (つまり, $p \leq k$) が存在することである。

証明 十分条件: E_j ($1 \leq j \leq r$) の性質により, T の点は X の部分集合 $X'=\{s_{j_1}, s_{j_2}, \dots, s_{j_p}\}$ のいずれかから到達可能であり, また, Y の部分集合 $Y'=\{t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_p}\}$ のいずれかへ到達可能である。 $V_1=X' \cup Y' \cup$

T , $E_1=E_{j_1} \cup E_{j_2} \cup \dots \cup E_{j_p}$, $G_1=(V_1, E_1)$ とし, $A=\{(t_{j_q}, s_{j_{q+1}}) | q=1, 2, \dots, p-1\} \cup \{(t_{j_p}, s_{j_1})\}$ とすると, G_1+A が強連結であることは明らかである。よって, $G+A$ は V' -強連結であり, かつ, $|A| \leq k$ である。

必要条件: A を極小集合とし, A' を A の辺から次の(1)(2)のように変換させて得られる辺集合とする。

(1) $V_j''=T_j \cup \{s_j, t_j\}$ ($1 \leq j \leq r$) とする。この時, 任意の辺 $e=(u, v) \in A$ に一対一対応する辺 $f(e)=(f(u), f(v)) \in A'$ について,

$$\begin{cases} f(u)=t_j \text{ if } u \in V_j'' \text{ for some } j, 1 \leq j \leq r, \\ f(v)=s_{q'} \text{ if } u \in V_{q'}'' \text{ for some } q, 1 \leq q \leq r \end{cases}$$

とする。

(2) (1)の結果によりできた多重辺を, 1本だけ残す。

この時, $|A'| \leq |A|$ であることは明らかであり, かつ, $G+A'$ が V' -強連結であるので, $G+A'$ は V' -強連結である。

A' の辺が入っている X の点集合を $X'=\{s_{j_1}, s_{j_2}, \dots, s_{j_p}\}$ とすると, $p \leq k$ であり, かつ, 任意の点 $z \in T$ について, z は X' のいずれかから到達可能である。よって, $T=T_{j_1} \cup T_{j_2} \cup \dots \cup T_{j_p}$ が成り立つ。

よって, P_1 は P_2 に多項式変換できるので, 決定問題 P_2 は NP 完全であり, 以上のことによって, 次の定理が得られる。

定理3.1 V' -強連結化拡大構成問題は NP 完全である。

4. 点部分集合に関するグラフ 2 辺連結化拡大構成問題

本章では, V' -2 辺連結化拡大構成問題(与えられたグラフ $G=(V, E)$ について, $G+A$ が V' -2 辺連結であるような最小集合 A を見つける問題)について述べる。

4.1 点部分集合 2 辺成分縮約グラフの構成

与えられたグラフ $G=(V, E)$ の 2 辺成分を $O(n+m)$ 時間で求め^{1, 10)}, V' の点を含む 2 辺成分に印 # (以下 # と略す) を付す。さらに, G の 2 辺成分縮約グラフ $C(G)=(C(V), C(E))$ を $O(n+m)$ 時間で作る¹⁾。この時, G の 2 辺成分の # に対応する $C(G)$ の点にも # を付す。これは, $O(n)$ 時間で実現でき, この時

$C(G)$ は木構造である。

次に、#の付いた $C(V)$ の点集合を N とし、 $C(G)$ から、次の(1)(2)を充たすように、不要な部想を削除した点部分集合 2 辺成分縮約グラフ $C'(G)=(C'(V), C'(E))$ を構成する。

(1) $C'(G)$ のすべての 0-2 リーフ、1-2 リーフが N の点となる。

(2) 付加に必要な辺数の下界が最小となる。

図 4.1 に $C(G)$ の例を、図 4.2 に $C'(G)$ の例を示す。ここで、●は N の点を表し、点線内は削除する部分を表す。

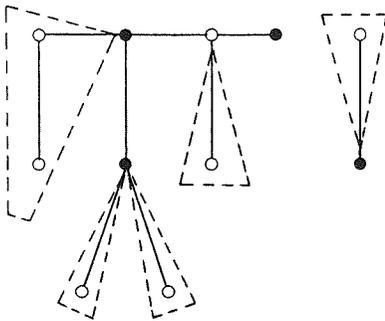


図 4.1 $C(G)$ 例

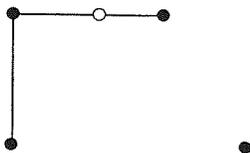


図 4.2 $C'(G)$ 例

$C(G)$ から $C'(G)$ を構成するには、Depth-first Search²⁾ (以下 DFS と略す) を用いて、バックトラックする時に、 N に含まれないカレント次数が 1 である点を削除すればよい。そのアルゴリズムを以下に示す。

Algorithm $C'(G)$ -Cnt.

Begin

1. For every vertex $v \in C(V)$, perform the following: **begin**
 $w(v) := \text{deg}(v); k(v) := 0;$
if $v \in N$ **then** $\#(v) := 1$
else $\#(v) := 0$ **end;**
2. For every edge $e \in C(E)$, e is marked "unused": $j := 0; C'(V) := \Phi; C'(E) :=$

$\Phi;$

3. **while** {there is a vertex $v \in N$ with $k(v) = 0$ } **do begin**

3.1 $n :=$ any vertex $v \in N$ with $k(v) = 0;$
 $z := n;$

3.2 z is put on the top of stack;
 $C'(V) := C'(V) \cup \{z\}; j := j + 1;$
 $k(z) := j;$

3.3 **while** stack is not empty **do begin**

(1) search an "unused" edge $e = (z, u);$

(2) **if** e is found **then begin**

$C'(E) := C'(E) \cup \{e\}; z := u;$
 z is put on the top of stack;
 $C'(V) := C'(V) \cup \{z\};$
 $j := j + 1; k(z) := j$ **end**

else begin

z is deleted from the top of stack;

if stack is not empty **then begin**

$x := z; z :=$ the top of stack;

if $\#(x) = 0$ and $w(x) = 1$ **then**

begin $w(z) := w(z) - 1;$

$C'(V) := C'(V) - \{x\};$

$C'(E) := C'(E) - \{(x, z)\}$

end end end end end

End.

この時、アルゴリズム $C'(G)$ -Cnt は DFS をベースにしているので、 $C'(G)$ は $O(|C'(V)| + |C'(E)|)$ 時間、つまり、 $O(n+m)$ 時間で構成できる。

4.2 辺付加数の下界

任意の点 $v \in C(V)$ について、アルゴリズム $C'(G)$ -Cnt によって付けられた番号 $k(v)$ のことを k -番号という。任意の点 $v \in C(V) - C'(V)$ について、 v の先祖²⁾ の中で k -番号が最大の N の点を $\text{anc}(v)$ とする。この時、以下の 3 種類の辺の対応関係 a, b, a' を定義する。

任意の点 $v \in V$ について、 $a(v)$ を v を含む G の 2 辺成分に対応する $C(G)$ の点とする。この時、 G の異なる 2 辺成分を結ぶ辺から、 $C(G)$ の異なる 2 点を結ぶ辺への対応 $A: A \rightarrow a(A)$ を次のように定義する：
 $a(A) = \{(a(v), a(u)) \mid (v, u) \in A, a(v) \neq a(u)\}.$

また、任意の点 $x \in C(V)$ について、 $b(x)$ を次の(1)(2)のような点とする。

- (1) $x \in C'(V)$ の時, $b(x) = x$,
- (2) $x \in C'(V)$ の時, $b(x) = \text{anc}(x)$.

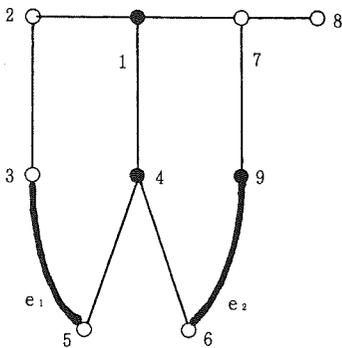
この時, a と同時に, 対応 $b: a(A) \rightarrow b(a(A))$ を次のように定義する: $b(a(A)) = \{(b(x), b(y)) \mid (x, y) \in a(A), x \neq y\}$.

$a(A)$ と $b(a(A))$ の関係を図 4.3 <a>, 図 4.3 に示す. 図 4.3 <a> は $a(A)$ の, 図 4.3 は $b(a(A))$ の例である. それらを太線で表す. e_1 と e'_1 , e_2 と e'_2 がそれぞれ対応する.

さらに, 任意の点 $w \in C'(V)$ について, $a'(w)$ を w に対応する G の 2 辺成分の任意の点とする. この時, a と同様に, 対応 $a': A' \rightarrow a'(A')$ を次のように定義する: $a'(A') = \{(a'(w), a'(z)) \mid (w, z) \in A', w \neq z\}$.

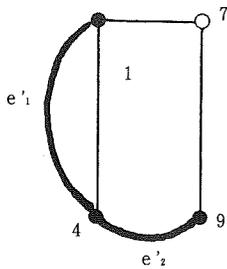
この時, 次の補題が成り立つことは明らかである.

補題 4.1 A を $G+A$ が $V-2$ 辺連結となるような最小辺集合とすると, $b(a(A))$ は $C'(G)+b(a(A))$ が 2 辺連結となるような最小辺集合である. 逆に, A' を $C'(G)+A'$ が 2 辺連結となるような最小辺集合と



(1~9: K-番号)
 $a(A) = \{e_1, e_2\}$

図 4.3 $C'(G)+a(A)$ の例



$b(a(A)) = \{e'_1, e'_2\}$

図 4.4 $C'(G)+b(a(A))$ の例

すると, $a'(A')$ は $G+a'(A')$ が $V-2$ 辺連結となるような最小辺集合である.

補題 4.1 により, $G+A$ が $V-2$ 辺連結となるような最小辺集合 A を求めることと, $C'(G)+A'$ が 2 辺連結となるような最小辺集合 A' を求めることは, 同値として扱える.

($|A| = |A'|$ である.)

$|A'|$ の下界は以下の補題のとおりである.

補題 4.2¹⁾ $C'(G)$ の 0-2 リーフ, 1-2 リーフの数をそれぞれ p, q とすれば, 下界は $|A'| = p + \lceil q/2 \rceil$ である.

【注】 $C(G)$ の 0-2 リーフ, 1-2 リーフの数をそれぞれ p', q' とすると, 明らかに $p' + \lceil q'/2 \rceil \geq p + \lceil q/2 \rceil$ となる.

4.3 辺付加方法

最小辺集合 A' を求めるには 2 辺連結化拡大構成問題¹⁾と同じ方法を用いる. 以下に, その方法を述べる.

B_1, B_2, \dots, B_t を $C'(G)$ の 1 辺成分とし, 点 $v(1), v(2), \dots, v(2t)$ を次の(1)(2)のように選ぶ.

(1) $B_j (1 \leq j \leq t)$ が 0-2 リーフでない時, $v(2j-1), v(2j)$ は B_j の異なる 1-2 リーフである.

(2) $B_j (1 \leq j \leq t)$ が 0-2 リーフの時, $v(2j-1) = v(2j) = B_j$ である.

この時, $A'_1 = \{(v(2j), v(2j+1)) \mid 1 \leq j \leq t-1\}$ とし, $T = C'(G) + A'_1$ とする. T は 1 辺連結である.

次に, T の 1-2 リーフの数を r とし, T を DFS で探索し, 1-2 リーフに, 見つかった順に番号 $\{v(1), v(2), \dots, v(r)\}$ を付す. この時, $A'_2 = \{(v(j), v(j + \lfloor r/2 \rfloor)) \mid 1 \leq j \leq \lfloor r/2 \rfloor\}$ とし, $G'_1 = C'(G) + (A'_1 \cup A'_2)$ とする.

この時, 次の補題が成り立つ.

補題 4.3¹⁾ G'_1 は 2 辺連結であり, $|A'_1 \cup A'_2| = p + \lceil q/2 \rceil$ である. また, $|C'(V)| \geq 3$ の時, G'_1 は単純グラフである.

$A' = A'_1 \cup A'_2, A = a'(A')$ とすれば, A は $G+A$ が $V-2$ 辺連結であるような最小辺集合であり, G が 3 つ以上の 2 辺成分を含む時, $G+A$ は単純グラフである. また, A は $O(n+m)$ 時間で求めることができる¹⁾.

4.4 ま と め

本問題は、以下の3つの部分から構成される。

- (1) G から、2辺成分縮約グラフ $C(G)$ を構成し、 $C(G)$ から点部分集合2辺成分縮約グラフ $C'(G)$ を構成する。
 - (2) $C'(G)$ を2辺連結にする最小辺集合 A' を求める。
 - (3) A' に対応する辺集合 $A = a'(A')G$ に付加する。
- 4.1節より、(1)の計算時間は $O(n+m)$ であり、4.3節より、(2)(3)の計算時間は $O(n+m)$ である。よって、次の定理が成り立つ。

定理4.1 $V-2$ 辺連結化拡大構成問題は $O(n+m)$ 時間で解決することができる。ただし、 n, m はそれぞれグラフの点の数、辺の数である。

5. 点部分集合に関するグラフ3辺連結化拡大構成問題

本章では、 $V-3$ 辺連結化拡大構成問題(与えられたグラフ $G=(V, E)$ について、 $G+A$ が $V-3$ 辺連結であるような最小辺集合 A を見つける問題)について述べる。

5.1 点部分集合3辺成分縮約グラフの構成

与えられたグラフ $G=(V, E)$ の3辺成分を $O(n+m)$ 時間で求め⁹⁾、 V の点を含む3辺成分に#を付す。さらに、 G の3辺成分縮約グラフ $F(G)=(F(V), F(E))$ を4.1節と同様に $O(n+m)$ 時間で作る。この時、 G の3辺成分の#に対応する $F(G)$ の点にも#を付す。これは、 $O(n+m)$ 時間で実現できる。

この時、 $F(G)$ は次の(1)~(4)を満足する構造を生成する。

- (1) 隣接する2つの2辺成分は1本の橋で結ばれている。
- (2) 1つの2辺成分は1個以上のブロックにより構成されている。
- (3) 1つのブロックは長さ1以上の1つのサイクルにより構成されている。ただし、サイクルの長さが1の時は、その1点で2辺成分が構成されている。
- (4) 1つの2辺成分に属する2つの長さが2以上の隣接するブロックは、切断点を1つだけ共有する。

次に、#の付いた $F(V)$ の点集合を N とし、 $F(G)$ から、次の(1)(2)を充たすように、不要な部分を削除し、

辺の付け替えをした、点部分集合3辺成分縮約グラフ $F'(G)=(F'(V), F'(E))$ を構成する。

- (1) $F'(G)$ のすべての0-3リーフ、1-3リーフ、2-3リーフが N の点となる。
- (2) 付加に必要な辺数の下界が最小となる。

図5.1に $F(G)$ の例を、図5.2に $F'(G)$ の例を示す。●は N の点を表し、点線内は削除する部分を表し、太線は付け替えた辺を表す。

$F(G)$ から $F'(G)$ を構成するには、DFSを用いて、バックトラックする時に、 N に含まれないカレント次数が1または2である点 v を削除すればよい。ただし、 v のカレント次数が2の時は、 v に隣接している2点 u_1, u_2 について、 v の削除後に辺 (u_1, u_2) を付加する。そのアルゴリズムを以下に示す。

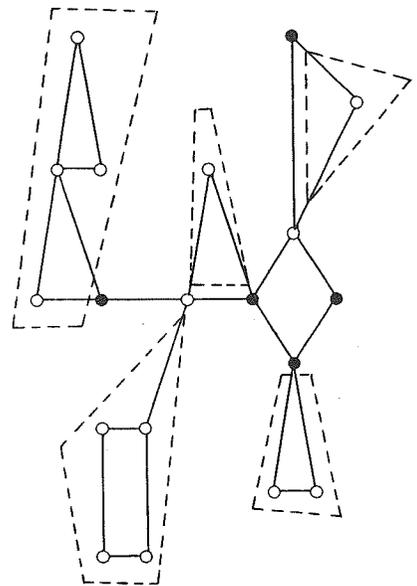


図5.1 $F(G)$ の例

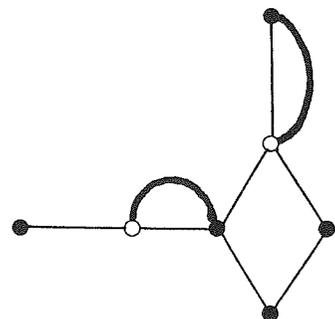


図5.2 $F'(G)$ の例

Algorithm $F(G)$ -Cnt.

Begin

1. For every vertex $v \in F(V)$, perform the following: begin
 - $w(v) := \deg(v); k(v) := 0;$
 - if $v \in N$ then $\#(v) := 1$
 - else $\#(v) := 0$ end;
2. For every edge $e \in F(E)$,
 e is marked "unused";
 $j := 0; F'(V) := \Phi; F'(E) := \Phi;$
3. while there is a vertex $v \in N$ with $k(v) = 0$ do begin
 - 3.1 $s :=$ any vertex $v \in N$ with $k(v) = 0;$
 $z := s;$
 - 3.2 z is put on the top of stack1;
 $F'(V) := F'(V) \cup \{z\}; j := j + 1;$
 $k(z) := j;$
 - 3.3 while stack1 is not empty do begin
 - (1) search an "unused" edge $e = (z, u);$
 - (2) if e is found then Forward
 - else Backtrack end end

End.

Procedure Forward.

Begin

1. e is marked "used";
 $F'(E) := F'(E) \cup \{e\};$
2. if $k(u) \neq 0$ then begin
 {{Comment: e is called a back-edge.}}
 u is put on the top of stack2;
 u is put on the top of stack3;
 $t := u$ end
 else begin
 {{Comment: e is called a tree-edge.}}
 $z := u;$
 z is put on the top of stack1;
 $F'(V) := F'(V) \cup \{z\}; j := j + 1;$
 $k(z) := j$ end

End.

Procedure Backtrack.

Begin

1. z is deleted from the top of stack1;
2. if stack1 is not empty then begin
 - 2.1 $x := z; z :=$ the top of stack1;
 - 2.2 if $\#(x) = 0$ and $w(x) \leq 2$ then begin

if $w(z) = 1$ then begin $w(z) := w(z) - 1;$ $F'(E) := F'(E) - \{(z, x)\}$ end

else begin

(1) if $z \neq t$ then begin $F'(E) := F'(E) \cup \{(z, t)\};$ (z, t) is marked "used" endelse $w(z) := w(z) - 2;$ (2) $F'(E) := F'(E) - \{(z, x)\}, (x, t)$

end;

 $F'(V) := F'(V) - \{x\}$ end

else begin

 $t := x;$

the top of stack2 is deleted;

 t is put on the top of stack2 end;2.3 if $z =$ the top of stack3 then begin z is deleted from the top of stack3;

the top of stack2 is deleted;

if stack2 is not empty then

 $t :=$ the top of stack2 end end

End.

この時、アルゴリズム $F(G)$ -Cnt は DFS をベースにしているので、 $F(G)$ は $O(|F(V)| + |F(E)|)$ 時間、つまり、 $O(n+m)$ 時間で構成できる。

5.2 辺付加数の下界

任意の点 $v \in F(V)$ について、4.2 節の k -番号と同様に k' -番号を定義する。 $F(G)$ の $F(G)$ -Cnt による木辺 (tree-edge) によって構成される木を $T(F)$ とする。この時、 $F(V)$ は $T(F)$ の点集合である。任意の点 $v \in F(V) - F'(V)$ について、 v の先祖の中で k' -番号が最大の $F(G)$ の点を $\text{anc}'(v)$ とする。この時、以下の3種類の辺の対応関係 f, g, f' を定義する。

任意の点 $v \in V$ について、 $f(v)$ を v を含む G の3辺成分に対応する $F(G)$ の点とする。この時、 G の異なる3辺成分を結ぶ辺から、 $F(G)$ の異なる2点を結ぶ辺への対応 $f: B \rightarrow f(B)$ を次のように定義する：
 $f(B) = \{(f(v), f(u)) \mid (v, u) \in B, f(v) \neq f(u)\}.$

また、任意の点 $x \in F(V)$ について、 $g(x)$ を次の(1)(2)のような点とする。

(1) $x \in F'(V)$ の時、 $g(x) = x,$ (2) $x \in F(V)$ の時、 $g(x) = \text{anc}'(x).$

この時、 f と同様に、対応 $g: f(B) \rightarrow g(f(B))$ を次のよ

うに定義する： $g(f(B)) = \{(g(x), g(y)) \mid (x, y) \in f(B), x \neq y\}$.

$f(B)$ と $g(f(B))$ の関係を図5.3<a>, 図5.3に示す。図5.3<a>は $f(B)$ の, 図5.3は $g(f(B))$ の例である。それらを太線で表す。 e_1 と e'_1, e_2 と e'_2 がそれぞれ対応する。また, 図5.3<a>の実線は木辺を, 点線は逆辺 (back-edge) を表す。

さらに, 任意の点 $w \in F(V)$ について, $f'(w)$ を w に対応する G の3辺成分の任意の点とする。この時, f と同様に, 対応 $f': B' \rightarrow f'(B')$ を次のように定義す

る： $f'(B') = \{(f'(w), f'(z)) \mid (w, z) \in B', w \neq z\}$ 。

この時, 次の補題が成り立つことは明らかである。

補題5.1 B を $G+B$ が $V-3$ 辺連結となるような最小辺集合とすると, $g(f(B))$ は $F'(G)+g(f(B))$ が3辺連結となるような最小辺集合である。逆に, B' を $F'(G)+B'$ が3辺連結となるような最小辺集合とすると, $f'(B')$ は $G+f'(B')$ が $V-3$ 辺連結となるような最小辺集合である。

補題5.1により, $G+B$ が $V-3$ 辺連結となるような最小辺集合 B を求めることと, $F'(G)+B'$ が3辺連結となるような最小辺集合 B' を求めることは, 同値として扱える。

($|B| = |B'|$ である。)

以下では, $|B'|$ の下界を求める。

$F'(G)$ は次の性質をもつ。

補題5.2 2点以上からなる $F'(G)$ の任意の2辺成分 H について, H が $j-2$ リーフの時, 少なくとも $\max(0, 2-j)$ 個の $2-3$ リーフをもつ。($j=0, 1, 2, \dots$)

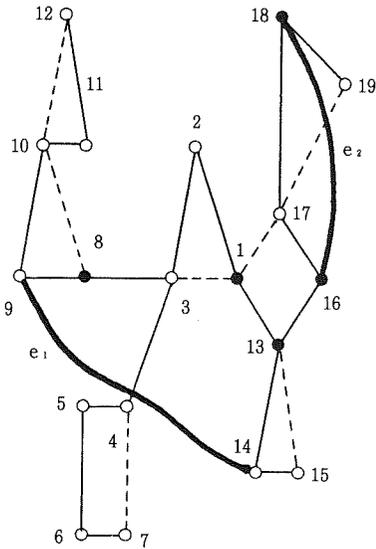
$|B'|$ の下界は以下の補題のとおりであることは明らかである。

補題5.3 すべての $j=0, 1, 2$ について, $F'(G)$ の $j-3$ リーフの数を p_j とし, $2-3$ リーフを $2-j$ 個しか含まない $j-2$ リーフの数を q_j とする。この時, $D = 3p_0 + 2p_1 + p_2 + q_0 + q_1 + q_2$ とすると, 下界は, $|B'| = \lceil D/2 \rceil$ である。

【注】 すべての $j=0, 1, 2$ について, $F'(G)$ の $j-3$ リーフの数を p'_j とし, $2-3$ リーフを $2-j$ 個しか含まない $j-2$ リーフの数を q'_j とする。この時, $D' = 3p'_0 + 2p'_1 + p'_2 + q'_0 + q'_1 + q'_2$ とすると, $D \leq D'$ となる。

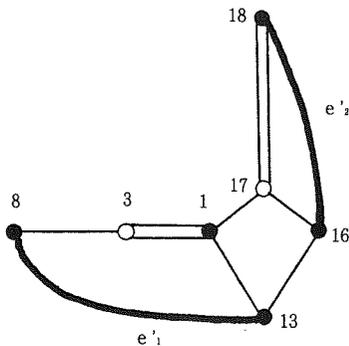
例題5.1 $F'(G)$ が図5.4のようになっているとする。 $F'(G)$ の2辺成分, 1辺成分は図5.5のとおりである。

この時, $P_0 = \Phi, P_1 = \{10\}, P_2 = \{1, 2, 5, 8, 12, 13, 15\}, Q_0 = \{H_3\}, Q_1 = \{H_4\}, Q_2 = \Phi$ であり, $D = 3 \times 0 + 2 \times 1 + 7 + 1 + 1 + 0 = 11$ となる。よって, $F'(G)$ を3辺連結化するための最小辺数は $\lceil D/2 \rceil = 6$ である。



(1~19: k'-番号)
 $f(B) = \{e_1, e_2\}$

図5.3<a> $F'(G)+f(B)$ の例



$g(f(B)) = \{e'_1, e'_2\}$

図5.3 $F'(G)+f(B)$ の例

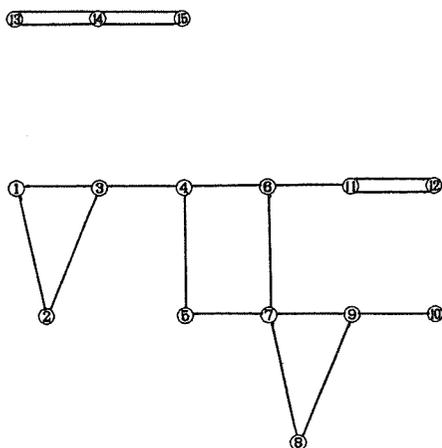


図5.4 $F(G)$ の例

2 辺成分	1 辺成分
$H_1 = \{1, 2, 3\}$	$W_1 = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$
$H_2 = \{4, 5, 6, 7, 8\}$	
$H_3 = \{10\}$	
$H_4 = \{11, 12\}$	
$H_5 = \{13, 14, 15\}$	$W_2 = \{H_5\}$

図5.5 $F(G)$ の2辺成分と1辺成分

5.3 辺付加方法

本問題では、 $F(G)+B'$ が3辺連結となるような最小辺集合 B' を求めて、それに対応する辺集合 $B=f(B')$ を G に付加する代わりに、以下の I~IIIの方法で、 $G+B_0$ が V -3 辺連結となるような最小辺集合 B_0 を求める。ただし、 $|B_0|=\lceil D/2 \rceil$ である。

I. グラフ G の V -2 辺連結化

$F(G)+A$ が2辺連結となるような最小辺集合 A を求める。その方法は4章に従う。

まず、 $F(G)$ の2辺成分を高々 $O(n+m)$ 時間で見つけ、 $F(G)$ の2辺成分縮約グラフ $C_F=(V_F, E_F)$ を $O(n+m)$ 時間で構成する。

C_F+A' が2辺連結であるような最小辺集合 A' を4章の方法で求める。この時、 C_F の0-2リーフ、1-2リーフの数をそれぞれ d_1, d_2 とすれば、 $|A'|=d_1 + \lceil d_2/2 \rceil$ である。

次に、 A' に対応する辺集合 $A=a''(A')$ を $F(G)$ に付加する。ここで、対応 a'' は、4.2節で定義した対

応 a' を次のように変更したものである。

任意の点 $w \in V_F$ について、 $a''(w)$ を w に対応する $F(G)$ の2辺成分 W の、次の(1)(2)のような点とする。

(1) W が $F(G)$ の1点からなる場合、 $a''(w)$ は W そのものである0-3リーフまたは1-3リーフである。

(2) W が $F(G)$ の2点以上からなる場合、 $a''(w)$ は W の任意の2-3リーフである。

この時、対応 $a': A' \rightarrow a''(A')$ を、 $a''(A') = \{(a''(w), a''(z)) \mid (w, z) \in A', w \neq z\}$ と定義する。ただし、 A の辺が入る $F(G)$ の2点以上からなる2辺成分 W' については、以下の [1] [2] も考慮する。

[1] W' が1-2リーフで、 A の辺が2本入り、2-3リーフが2つ以上ある場合、 A の辺が入る点は2つの異なる2-3リーフとする。

[2] W' が0-2リーフの場合、 A の辺が入る点は2つの異なる2-3リーフとする。ただし、 W' に A の辺が3本入り、2-3リーフが3つ以上ある場合は、 A の辺が入る点は3つの異なる2-3リーフとする。

更に、 A に対応する辺集合 $B_1=f(A)$ を G に付加する。明らかに、 $|B_1|=|A|=d_1 + \lceil d_2/2 \rceil$ である。

ここで、 G に辺集合 B_1 を付加したグラフを $G'=G+B_1$ とする。

C_F より、 $F(G)$ の各2辺成分の次数は高々 $O(n+m)$ 時間で分かる。さらに、 $F(G)$ の各0-2リーフ、1-2リーフ毎に、DFSで探索して2-3リーフを見つけ、見つかった順に番号を付けていけば、各 $a''(w)$ は高々 $O(n+m)$ 時間で見つけることができる。よって、4章より、 G' は $O(n+m)$ 時間で構成できる。

例題5.2 例題5.1の $F(G)$ を2辺連結化する最小辺集合 A を求める。

$F(G)$ の0-2リーフは H_5 、1-2リーフは H_1, H_3, H_4 であるので、 $d_1=1, d_2=3$ となる。よって、 $d_1 + \lceil d_2/2 \rceil = 3$ である。

4章の方法で求められた A の辺を、図5.6に太線で示す。この時、 $|A|=3$ である。

II. V -2 辺連結化したグラフへの付加辺数の下界

G' の3辺成分縮約グラフ $H=(V_H, E_H)$ を構成し、アルゴリズム $F(G)$ -Cnt を用いて、 H の点部分集合3辺成分縮約グラフ $H'=(V_H, E_H')$ を構成する。 H' の構成は、5.1節より、 $O(n+m)$ 時間でできる。

この時、明らかに、 $G'+B_2$ が V -3 辺連結となるよ

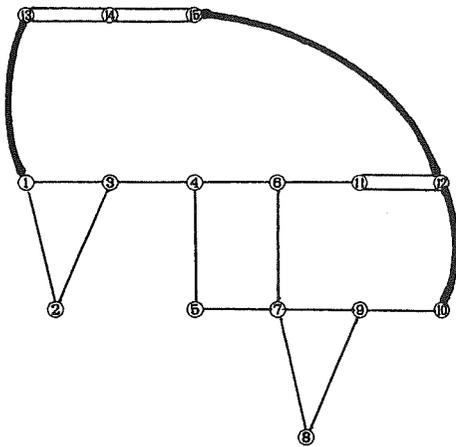


図 5.6 $F(G)+A$ の例

うな最小辺集合 B_2 を求めることと, $H'+B_2$ が 3 辺連結となるような最小辺集合 B'_2 を求めることは, 同値として扱える。($|B_2|=|B'_2|$ である。)

以下では, $|B'_2|$ の下界を求める。

点部分集合 3 辺成分縮約グラフ H' について, 次の補題が成り立つ。

補題 5.4 R を H' の 2-3 リーフの数とすると, $R = D - (2d_1 + d_2 + r_0)$ である。ただし, d_2 が偶数の時は $r_0 = 0$ であり, d_2 が奇数の時は $r_0 = 1$ である。

以下に, 補題 5.4 の証明を述べる。

明らかに, H' の 2-3 リーフの数を求めることと, $F(G)+A$ の 2-3 リーフの数を求めることは同値として扱える。よって, $F(G)+A$ の 2-3 リーフの数を求めることにより, 補題 5.4 を証明する。

$F(G)$ について, 次の(1)~(3)のような集合を定義する。

- (1) すべての $j=0, 1, 2$ について, j -3 リーフの集合を P_j ,
- (2) すべての $j=0, 1, 2$ について, j -2 リーフの集合を L_j ,
- (3) すべての $j=0, 1, 2$ について, 2-3 リーフを 2-j 個しか含まない L_j の要素の集合を Q_j とする。

また, $F(G)+A$ について, A の辺が入った L_j ($j=0, 1$) の 2-3 リーフの集合を P'_j とする。

d_2 が偶数の時, $F(G)+A$ の 2-3 リーフになる $F(G)$ の点集合は次の [1] ~ [3] だけである。

[1] すべての $j=0, 1$ について, P_j のすべての要素,

[2] すべての $j=0, 1, 2$ について, Q_j のすべての要素,

[3] $P_2 - (P'_{20} \cup P'_{21})$ のすべての要素,

これら以外の $F(G)+A$ の 3 辺成分の次数は明らかに 3 以上である。

ここで, $|P'_{20}| = 2(d_1 - |P_0|)$, $|P'_{21}| = d_2 - |P_1|$ である。よって, $F(G)+A$ の 2-3 リーフの数は,

$$\begin{aligned} R &= |P_0| + |P_1| + |Q_0| + |Q_1| + |Q_2| + |P_2 - (P'_{20} \cup P'_{21})| \\ &= p_0 + p_1 + q_0 + q_1 + q_2 + p_2 \\ &\quad - 2(d_1 - p_0) - (d_2 - p_1) \\ &= 3p_0 + 2p_1 + p_2 + q_0 + q_1 + q_2 - (2d_1 + d_2) \\ &= D - (2d_1 + d_2) \end{aligned}$$

となる。

d_2 が奇数の時, $F(G)+A$ の 2-3 リーフになる $F(G)$ の点集合は次の [1] ~ [4] だけである。

[1] すべての $j=0, 1$ について, A の辺が 2-j 本入った P_j のすべての要素。これらの集合を P_j^+ とする。

[2] すべての $j=0, 1$ について, A の辺が 2-j 本入った Q_j のすべての要素。これらの集合を Q_j^+ とする。

[3] Q_2 のすべての要素。

[4] $P_2 - (P'_{20} \cup P'_{21})$ のすべての要素。

これら以外の $F(G)+A$ の 3 辺成分の次数は明らかに 3 以上である。

よって, $F(G)+A$ の 2-3 リーフの数は,

$$\begin{aligned} R &= |P_0^+| + |P_1^+| + |Q_0^+| + |Q_1^+| + |Q_2| + |P_2 - (P'_{20} \cup P'_{21})| \end{aligned}$$

となる。

以下では, $|P_0^+|, |P_1^+|, |Q_0^+|, |Q_1^+|, |P'_{20}|, |P'_{21}|$ を求める。

A の辺付加方法より, $F(G)$ には A の辺が $3-h$ 本入る $h-2$ リーフ W が 1 つだけ存在する。ただし, $h=0$ または $h=1$ である。この時, W について, 次の 2 つの場合を考える。

$W \in P_0 \cup P_1 \cup Q_0 \cup Q_1$ の場合: W を含む $F(G)+A$ の 3 辺成分の次数は 3 以上となる。 W 以外の $P_0 \cup P_1 \cup Q_0 \cup Q_1$ の要素はすべて $F(G)+A$ の 2-3 リーフとなる。よって,

$$\begin{aligned} |P_0^+| + |P_1^+| + |Q_0^+| + |Q_1^+| &= \\ p_0 + p_1 + q_0 + q_1 - 1 \end{aligned}$$

となる。また、明らかに、 $|P_{20}|=2(d_1-p_0)$, $|P_{21}|=d_2-p_1$ である。

$W \in P_0 \cup P_1 \cup Q_0 \cup Q_1$ の場合：明らかに、 $|P_0^+|=p_0$, $|P_1^+|=p_1$, $|Q_0^+|=q_0$, $|Q_1^+|=q_1$ である。 W に関しては、 A の辺はすべて P_2 の点に入り、 A の辺が入らなかった W のすべての P_2 の点は $F(G)+A$ の 2-3 リーフとなる。よって、 $|P_{20}^+|+|P_{21}^+|=2(d_1-p_0)+(d_2-p_1)+1$ となる。

以上より、 $R=D-(2d_1+d_2+1)$ となる。

よって、補題 5.4 が成り立つ。

補題 5.4 より、次の補題が成り立つ。

補題 5.5 $H'+B_2'$ が 3 辺連結となるような最小辺集合 B_2' の辺数の下界は、 $|B_2'|=\lceil R/2 \rceil$ である。

また、 $\lceil D/2 \rceil = d_1 + \lceil d_2/2 \rceil + \lceil R/2 \rceil$ が成り立つ。

例題 5.3: 例題 5.2 の $F(G)+A$ の 3 辺成分は、 $Z_1=\{1, 3\}$, $Z_2=\{2\}$, $Z_3=\{4, 6, 7, 9, H_4\}$, $Z_4=\{5\}$, $Z_6=\{8\}$, $Z_7=\{H_3\}$, $Z_7=\{H_5\}$ であり、2-3 リーフは、 Z_2, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7 である。この時、 $F(G)+A$ の 2-3 リーフは補題 5.4 の証明過程で示された $F(G)$ の 2 辺成分、3 辺成分である。

一方、 d_2 が奇数なので、 $R=D-(2d_1+d_2+1)=11-(2+3+1)=5$ となり、 $F(G)+A$ の 2-3 リーフの数と一致する。

よって、 $F(G)+A$ を 3 辺連結化するための辺数の下界は $\lceil R/2 \rceil = 3$ となり、 $\lceil D/2 \rceil = d_1 + \lceil d_2/2 \rceil + \lceil R/2 \rceil$ である。

III. $V-2$ 辺連結化したグラフへの辺付加方法

最小辺集合 B_2' は辺連結度増加拡大構成問題⁶⁾と同じ方法を用いる。以下に、その方法を述べる。

点部分集合 3 辺成分縮約グラフ $H'(V_{H'}, E_{H'})$ を DFS で探索し、2-3 リーフに、見つかった順に番号 $\{v(1), v(2), \dots, v(R)\}$ を付す。この時、 $B_2' = \{(v(j), v(j + \lceil R/2 \rceil)) | 1 \leq j \leq \lceil R/2 \rceil\}$ とし、 $H'' = H' + B_2'$ とする。なお、この方法は文献 [16, 17] で既に示されている。(論文 [6] は、この方法は連結度が 4 以上の場合にも適用できることを述べていることになる。詳しくは付録を参照のこと。)

この時、次の 2 つの補題が成り立つ。

補題 5.6^{6, 16, 17)} H' は 3 辺連結であり、 $|B_2'| = \lceil R/2 \rceil$ である。

補題 5.7 $|V_{H'}| \geq 4$ の時、 H'' は単純グラフである。

$B_2 = f(B_2')$ とすれば、 B_2 は $G+(B_1 \cup B_2)$ が $V-3$ 辺連結であるような最小辺集合であり、 G' が 4 つ以上の 3 辺成分を含む時、 $G+(B_1 \cup B_2)$ は単純グラフである。また、番号 $v(1), v(2), \dots, v(R)$ は $O(n+m)$ 時間で見つけることができるので、 B_2 は $O(n+m)$ 時間で求めることができる。

例題 5.4 例題 5.2 の $F(G)+A$ に対応する元のグラフ $G'=G+B_1$ ($B_1=f(A)$ である) の点部分集合 3 辺成分縮約グラフ H' は図 5.7 のようになる。ここで、 H' の点 z_j ($j=1, 2, \dots, 7$) は、 $F(G)+A$ の 3 辺成分 Z_j に対応する G' の 3 辺成分に対応する点である。 H' の 2-3 リーフは z_2, z_4, z_5, z_6, z_7 である。

H' を 3 辺連結化する最小辺集合 B_2' の辺を、図 5.8 に太線で示す。この時、 $|B_2'|=3$ である。

よって、例題 5.1 のグラフ $F(G)$ (図 5.4) は $\lceil D/2 \rceil = 6$ 本の辺で 3 辺連結化できる。

5.4 ま と め

本問題は、以下の 5 つの部分から構成される。

- (1) G から、3 辺成分縮約グラフ $F(G)$ を構成し、 $F(G)$ から点部分集合 3 辺成分縮約グラフ $F'(G)$ を構成する。
- (2) 4 章と同様の方法で、 $F'(G)$ を 2 辺連結にする最小辺集合 A を求め、 A に対応する辺集合 $B_1=f(A)$

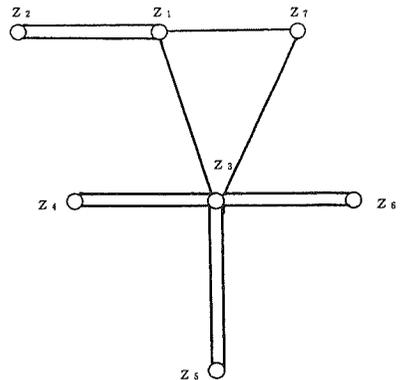


図 5.7 点部分集合 3 辺成分縮約グラフ H'

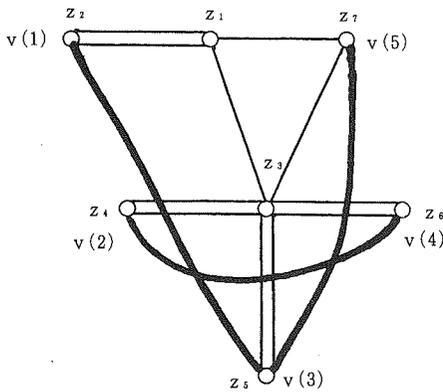


図 5.8 $H' + B'_2$

を G に付加する。

(3) (2)で構成された $V-2$ 辺連結グラフを G' とする。 G' から、3 辺成分縮約グラフ H を構成し、 H から点部分集合 3 辺成分縮約グラフ H' を構成する。

(4) H' を 3 辺連結にする最小辺集合 B'_2 を求める。

(5) B'_2 に対応する辺集合 $B_2 = f'(B'_2)$ を G' に付加する。

5.1 節より, (1)の計算時間は $O(n+m)$ であり, 5.3 節 I より, (2)の計算時間は $O(n+m)$ であり, 5.3 節 II より, (3)の計算時間は $O(n+m)$ であり, 5.3 節 III より, (4)(5)の計算時間は $O(n+m)$ である。よって, 次の定理が成り立つ。

定理 5.1 $V-3$ 辺連結化拡大構成問題は $O(n+m)$ 時間で解決することができる。ただし, n, m はそれぞれグラフの点の数, 辺の数である。

結 言 本論文では, 次の(1)~(3)の結果を得ることができた。

(1) 点部分集合に関する有向グラフの強連結化拡大構成問題は NP 完全である。

(2) 点部分集合に関するグラフの 2 辺連結化拡大構成問題を解く $O(n+m)$ 時間アルゴリズム。

(3) 点部分集合に関するグラフの 3 辺連結化拡大構成問題を解く $O(n+m)$ 時間アルゴリズム。

この結果, 有向グラフに関しては, 点部分集合を限定すると多項式時間で解けないことが示された。

また, 5 章の辺付加方法は, 点部分集合 3 辺成分縮約グラフに対して論文[16, 17]の $(U, U, 3E, =)-AP$ の解法をそのまま適用することと同値である, つまり,

5.2 及び 5.3 節の辺付加方法と論文[16, 17]の $(U, U, 3E, =)-AP$ の解法が同値であることが示された。このことにより, 以下のことも示される。

論文 [6] は, 一般に, $(k-1)$ 辺連結グラフを最小辺数で k 辺連結化するアルゴリズム (辺付加方法は, 5.3 節及び付録を参照のこと) について述べているが, 論文 [16, 17] 及び本論文では, 「与えられたグラフを最小辺数で 3 辺連結化する問題」を, 付加する点を限定して, [6] の辺付加方法を 2 回用いることにより解くことができる (次の①②のようにできる) ことを示した。

① 任意のグラフ G の 3 辺成分縮約グラフ $F(G)$ の 2 辺成分縮約グラフ H について, 論文 [6] の辺付加方法で H を “2 辺連結” 化する最小辺集合 A を求める。この時, A の任意の辺 $e=(w, z)$ に対応する辺集合 $a''(A)$ の辺 $e''=(a''(w), a''(z))$ について, $a''(w), a''(z)$ はそれぞれ w, z に対応する $F(G)$ の 2 辺成分の “特定の点” である。(5.2 節参照)

② 2 辺連結グラフ $G'=G+f(a''(A))$ の 3 辺成分縮約グラフ $F(G')$ について, 論文 [6] の辺付加方法で $F(G')$ を “3 辺連結” 化する最小辺集合 B を求める。この時, B の任意の辺 $e_1=(w', z')$ に対応する辺集合 $f(B)$ の辺 $e_1=(f(w'), f(z'))$ について, $f(w'), f(z')$ はそれぞれ w', z' に対応する $F(G')$ の 3 辺成分の “任意の点” である。(5.3 節参照)

$k \geq 4$ の場合も, 「与えられたグラフを最小辺数で k 辺連結化する問題」を付加する点を限定して, 論文[6] の辺付加方法を $(k-1)$ 回用いることにより解くことができることは容易に推測できる。

また, 本論文を “3 辺連結化” に限定にしたのは, 1 成分, 2 成分, 3 成分は線形時間で見つけることができ, 従って, 3 辺連結化拡大構成問題自体が線形時間で解決できるからである。

以上のことをまとめると, 次のような結果を得られる。

[1] $k=2, 3$ の時, $(U, U, kE, \subset)-AP$ について, 点部分集合 k 辺連結縮約グラフを作ることにより, $(U, U, kE, =)-AP$ を解くアルゴリズムを適用することができる。

[2] 上記の点部分集合 k 辺連結縮約グラフは, 元の k 辺連結縮約グラフの性質より, DFS を用いることにより, 線形時間で構成できる。

[3] $(U, U, 3E, =)-AP$ について, 論文[16, 17] 及び本論文の辺付加方法 (5.2 及び 5.3 節) のアル

ゴリズムで $O(n+m)$ 時間で解決できることは明らかである。(論文 [16, 17] が発表された当時は, 3 辺成分を見つける部分だけが多項式時間を必要としていたが, その部分も論文 [9] により解決されているので, $(U, U, 3E, =)$ -AP については, これらのアルゴリズムにより $O(n+m)$ 時間で解決できる。) また, これらの辺付加方法は, 切断点の考慮, 場合分けが不必要なので, 論文 [15] の方法に比べて, より簡易である。

また, 上記推測の厳密な立証を前提として, 本論文の辺付加方法によって, 次のような利点が与えられる。

[4] $(U, U, kE, =)$ -AP について, $k \geq 4$ の場合も, $k=3$ の場合と同じ考え方で, 与えられたグラフを最小辺数で k 辺連結化できる。(論文 [15] の方法では, $k=3$ の場合しか適用できない。)

[5] $(U, U, kE, =)$ -AP について, $k \geq 4$ の時, 論文 [12] の方法は, 1 本辺を付加すべき点の対 (admissible pair) を求めて辺を付加する作業を与えられたグラフの必要最小辺数回繰り返しているの, そのたびにデータ構造を作らねばならないが, 付加する点を限定して, 論文 [6] の辺付加方法を $(k-1)$ 回用いることにより解く方法では, $(k-1)$ 回だけデータ構造を作ればよいので, 計算量のオーダーを論文 [12] の方法より下げることができる。

「はじめに」で課題とした, 現実的な問題への効果・影響を要約すると, 次の(1)(2)のようにいうことができる。

(1) 通信路が双方向の時, 通信路の障害に対するネットワーク全体の信頼性・耐故障性, 重点となる交換機・計算機どおしの通信に関する信頼性・耐故障性ともに, 線形時間で効率よく向上させることができる。

(2) 通信路が片方向の時, 通信路の障害に対する, 重点となる交換機・計算機どおしの通信に関する信頼性・耐故障性の向上は, 多項式時間ではできない。

今後の課題としては, つぎのようなことが考えられる。

[1] (U, U, kE, \subset) -AP について, $k \geq 4$ の場合の, 点部分集合 k 辺連結縮約グラフをできるだけ効率のよい計算量で構成するアルゴリズムの考案。

[2] $(U, U, kE, =)$ -AP について, $k \geq 4$ の場合の, 上記の推測を厳密に立証する。

[3] $(D, U, 2E, =)$ -AP について, 論文 [8] の改良アルゴリズムの考案。

[4] $(D, U, kE, =)$ -AP について, できるだけ効率のよい計算量で解決するアルゴリズムの考案。

[5] (D, U, kE, \subset) -AP について, できるだけ効率のよい計算量で解決する近似アルゴリズムの考案。

参 考 文 献

- [1] K. Eswaran and R. Tarjan: *Augmentation problem*, SIAM J. Comput. 5, 4 (1976), pp.653-665.
- [2] S. Even: *Graph Algorithms*, Computer Science Press (1979).
- [3] G. Frederickson and J. Ja' ja': *Approximation algorithms for several graph augmentation problem of weighted graph*, SIAM J. Comput. 10 (1981), pp.270-283.
- [4] Y. Kajitani and S. Ueno: *The minimum augmentation of a directed tree to a k -edge-connected directed graph*, Networks 16 (1986), pp.181-197.
- [5] T. Masuzawa, K. Hagihara and N. Tokura: *An optimal time algorithm for the k -vertex-connectivity unweighted augmentation problem for rooted directed trees*, Discrete Appl. Math. 17 (1987), pp.67-105.
- [6] D. Naor, D. Gusfield and C. Martel: *A fast algorithm for optimally increasing the edge-connectivity*, Proc. 31st Annual IEEE symposium on foundations of computer science (1990), pp.698-707.
- [7] A. Rosenthal and A. Goldner: *Smallest augmentations to biconnect a graph*, SIAM J. Comput. 6, 1 (1977), pp.55-66.
- [8] M. Takahashi and T. Watanabe: *2-Edge-Connectivity Augmentation Problems for Directed Graphs*, IEICE (Japan) Technical Report, COMP89-57 (1989), pp.53-60.
- [9] S. Taoka, T. Watanabe and K. Onaga: *A linear time algorithm for computing all 3-edge-connected components of a multigraph*, Trans. IEICE, E75-3 (1991), pp.410-424.
- [10] R. Tarjan: *A note on finding the bridge of a graph*, Information Proc. Lett. 2(1974).
- [11] T. Watanabe, T. Mashima and S. Taoka: *The k -edge-connectivity augmentation problem of weighted graph*, Lecture Notes in Comput.

- Sci. 650, Algorithm and Computation, Springer-Verlag, Berlin (1992), pp.31-40.
- [12] T. Watanabe and A. Nakamura: *Edge-connectivity augmentation problems*, J. Comput. System Sci., 35, 1 (1987), pp.96-144.
- [13] T. Watanabe and A. Nakamura: *A minimum 3-connectivity augmentation of graph*, J. Comput. System Sci., 46, 1 (1993), pp.91-128.
- [14] T. Watanabe, S. Taoka and T. Mashima: *Approximation algorithms for the 3-edge-connectivity augmentation problem of graphs*, Proc. IEEE Asia-Pacific Conference on Circuits and Systems (1992), pp.424-429.
- [15] T. Watanabe and M. Yamakado: *A linear time algorithm for smallest augmentation to 3-edge-connect a graph*, Trans. IEICE of Japan, E76-A, 4 (1993), pp.518-531.
- [16] 高橋: ネットワークモデルの構成に関する基礎的研究, 昭和58年度広島大学大学院工学研究科修士論文
- [17] 高橋, 渡辺, 中村: 辺付加によるグラフの拡大構成問題, 「計算機科学の基礎理論」報告書 (1984-03), pp. 243-252及び, 京都大学数理解析研究所講究録第522巻, pp.16-25

付 録

論文 [6] は, $(k-1)$ 辺連結グラフを最小辺数で k 辺連結にする方法を示しており, その方法は次のとおりである。ここで, k は任意の自然数である。

与えられた $(k-1)$ 辺連結グラフ G を DFS の規則に従って探索し, n 個の次数が $k-1$ の k 辺成分に見つ

かった順に番号 $\{v(1), v(2), \dots, v(n)\}$ を付す。この時, $A = \{(v(j), v(j + \lfloor n/2 \rfloor)) \mid 1 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor\}$ とし, $G' = G + A$ とする。この時, G' は k 辺連結である。

論文 [16, 17] は $k=3$ の場合に関して論文 [6] と同じ方法で 2 辺連結グラフから最小辺数で 3 辺連結グラフが構成できることを既に示している。(逆にいえば, 論文 [6] は論文 [16, 17] の $k=3$ を “ k は任意の自然数” に拡張したものである。)

なお, 実際は, 論文 [16, 17] は, 以下のような方法で与えられたグラフ G を最小辺数で 3 辺連結にする方法を示したものである。

(1) G の 3 辺成分縮約グラフ $F(G)$ を構成し, $F(G)$ の 2 辺成分縮約グラフ $C_F = (V_F, E_F)$ を構成する。

(2) $C_F + A'$ が 2 辺連結になるような最小辺集合 A' を第 4 章の方法で求め, A' に対応する辺集合 $A = a(A')$ を $F(G)$ に付加する。ただし, 対応 a は 5.3 節 I の方法に従う。

(3) グラフ $H = F(G) + A$ の 3 辺成分縮約グラフ $F(H)$ を構成し, $F(H)$ を DFS で探索し, $F(H)$ の n 個の 2-3 リーフに見つかった順に番号 $v(1), v(2), \dots, v(n)$ を付し, $B' = \{(v(j), v(j + \lfloor n/2 \rfloor)) \mid 1 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor\}$ とし, $F(H) + B'$ とする。この時, $F(H) + B'$ は 3 辺連結である。

(4) $B' + A$ に対応する辺集合を $f(B' + A)$ とすると, $f(B' + A)$ は $G + f(B' + A)$ が 3 辺連結になるような最小辺集合である。ただし, 対応 f は次のようになる。

任意の点 $w \in F(G)$ について, $f(w)$ を w に対応する G の 3 辺成分の任意の点とすると, $f(B' + A) = \{(f(w), f(z)) \mid (w, z) \in B' + A, w \neq z\}$ である。