

福岡工業大学 学術機関リポジトリ

古典的核四重極子の運動（第二報）

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2021-03-01 キーワード (Ja): キーワード (En): NQR, chaotic oscillation, Poincare map, Lyapunov exponent, stability of a periodic solution 作成者: 川畑, 茂徳, 時田, 正彦 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/11478/00001677

古典的核四重極子の運動 (第二報)

川 畑 茂 徳 (一般教育数学教室)
時 田 正 彦 (一般教育物理学教室)

Dynamics of Classical Quadrupole Moment (second report)

Shigetoku KAWABATA (Department of Mathematics)

Masahiko TOKITA (Department of Physics)

Abstract

We discuss a classical system of the nuclear quadrupole moment with the perturbation of the delta function type whose dynamics leads directly to an area-preserving iterated map. This mapping allow us to reduce the study of the continuous physical model to the study of an associated discrete time system, namely Poincaré map. In reference to the calculated results, the fixed points of this mapping and their stability are discussed.

Key Words: *NQR, chaotic oscillation, Poincaré map, Lyapunov exponent, stability of a periodic solution*

1. 序 論

我々は系として核四重極共鳴を取り上げ、カオスの問題に取り組んだ⁶⁾。古典力学系として核四重極子の運動をとらえると、電場勾配が存在しかつ外場が無い場合、系は非対称なコマの自由運動に等価であり、可積分系の非線形力学の典型的な場合になっている、その運動は周期的で、解のすべては楕円関数で厳密に記述することができる。我々は、この系にパルス外場を摂動として加えた場合、カオスの運動が存在しうかなを問題にした。

カオスの運動をする最も簡単な類似の系としてはキック衝撃のある単振り子の運動がある^{5),7)}。摂動がない場合、単振り子の運動は周期的で、解は楕円関数で表される。この振り子を蹴り上げるような同じ大きさ

のキックの衝撃を周期的に加えると、振り子はカオスの運動をすることが知られている。

この二つの系の共通することは、物理系を記述する常微分方程式系をキック衝撃の周期に関して積分することによって、直接、付随する逐次写像 (Poincaré map) がえられることである。非線形方程式系の周期解を、Poincaré 断面上で考えると周期解は固定点になることを使うと、周期解の分岐を調べることができる。このためには、流れの固定点と Poincaré 断面の固定点が全く同じ分岐を示すかということが問題である、幸いにして、我々の系では、運動方程式を解かなくとも、逐次写像は計算でき Poincaré 断面上の点の動きが分かる、Floquet の定理^{4),8)}によって Poincaré 断面上の線形安定性を容易に解析できる。

2. 核四重極子の運動方程式

最初に、核がそもそも量子世界の存在であることを

考慮し、まず核四重極子の量子論的運動方程式をたて、つぎにこの運動方程式を古典近似し、核四重極子の古典論的運動方程式へ移行する。

2.1 外場のある場合の系のハミルトニアン

核スピン \mathbf{I} の大きさ I が 1 以上のとき、核は電氣的四重極モーメントを持つ、そのゆえに勾配のある電場におかれた核の静電エネルギーは核の方位とともに変化する。

有効四重極項ハミルトニアン H_Q は、

$$H_Q = \frac{eQ}{6I(2I-1)} \sum_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} \left[\frac{3}{2} (I_\alpha I_\beta + I_\beta I_\alpha) - \delta_{\alpha\beta} I^2 \right] \quad (2.1)$$

であたえられる。 $V_{\alpha\beta}$ は原点における電場ポテンシャルの 2 階微分係数、つまり電場勾配で、

$$V_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 V}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \quad (2.2)$$

で定義されている。ここで、記号 $\stackrel{\text{def}}{=}$ は、左辺が右辺で定義されていることを表す。 x_α ($\alpha = 1, 2, 3$) はそれぞれ x, y, z を表し、 e は陽子の電荷である。ここで電場勾配対称テンソル $V_{\alpha\beta}$ を $V_{\alpha\beta} \equiv 0$ ($\alpha \neq \beta$) となるように主軸を座標軸にとる。さらに以下に定義される非対称パラメータ η と電場勾配パラメータ q とを導入すれば、ハミルトニアン H_Q は、

$$H_Q = A [(3I_z^2 - I^2) + \eta(I_x^2 - I_y^2)] \quad (2.3)$$

である。定数 A は、

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^2 Q q}{4I(2I-1)} \quad (2.4)$$

であり、非対称パラメータ η と電場勾配パラメータ q とは、

$$eq \stackrel{\text{def}}{=} V_{zz} \quad (2.5)$$

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(V_{xx} - V_{yy})}{V_{zz}} \quad (2.6)$$

である。

パルス外部磁場 $\mathbf{H}(t)$ による摂動ハミルトニアン H_p は、

$$H_p = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}(t) \quad (2.7)$$

であたえられる。ここで、点 (\cdot) はスカラー積を表し、 $\boldsymbol{\mu}$ は核の磁気モーメントベクトルで、

$$\boldsymbol{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_n \hbar \mathbf{I} \quad (2.8)$$

であり、 γ_n は核の磁気回転比である。ここで、外部磁場の方向を電場勾配の主軸の x 軸方向にとり、時間変化を周期 T のデルタ関数形にとれば、ハミルトニアン H_p は、

$$H_p = \gamma_n \hbar I_x H_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad (2.9)$$

となる。ここで、 H_0 は外部磁場の大きさであり、 m は整数である。

最終的に、系の全ハミルトニアン H は、

$$H = H_Q + H_p \quad (2.10)$$

となる。

2.2 Heisenberg の運動方程式

Heisenberg の運動方程式を用いれば、角運動量 \mathbf{I} の時間変化は、

$$i\hbar \frac{d\mathbf{I}}{dt} = [\mathbf{I}, H] \quad (2.11)$$

であたえられる。ここで右辺の括弧は、

$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} ab - ba \quad (2.12)$$

で定義される交換括弧である。角運動量の成分間の交換関係は、

$$[I_x, I_y] = iI_z \quad (2.13)$$

において、添字 x, y, z を順に循環すれば、全てのものが得られる。

角運動量の成分の運動方程式は、ハミルトニアン H を Heisenberg の運動方程式に代入すれば、

$$\frac{dI_x}{dt} = -\frac{A}{\hbar} (\eta + 3) (I_y I_z + I_z I_y) \quad (2.14-a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_y}{dt} = & -\frac{A}{\hbar} (\eta - 3) (I_z I_x + I_x I_z) \\ & + \gamma_n I_z H_0 \sum_m \delta(t - mT) \end{aligned} \quad (2.14-b)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_z}{dt} = & -2\frac{A}{\hbar} \eta (I_x I_y + I_y I_x) \\ & - \gamma_n I_y H_0 \sum_m \delta(t - mT) \end{aligned} \quad (2.14-c)$$

と得られる。

この量子論の式を古典近似するには、角運動量演算子において、 $I_i I_j = I_j I_i$ と可換にすればよい。つまり、古典的核四重極子の運動方程式は、

$$\frac{dI_x}{dt} = -2\frac{A}{\hbar} (\eta + 3) I_y I_z \quad (2.15-a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_y}{dt} = & -2\frac{A}{\hbar} (\eta - 3) I_z I_x \\ & + \gamma_n I_z H_0 \sum_m \delta(t - mT) \end{aligned} \quad (2.15-b)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_z}{dt} = & -4\frac{A}{\hbar} \eta I_x I_y \\ & - \gamma_n I_y H_0 \sum_m \delta(t - mT) \end{aligned} \quad (2.15-c)$$

であたえられる。

この系は、運動方程式の右辺に時間をあからさまに

含む非時励系であり、運動の保存量が1つ存在する。それは角運動量の大きさの2乗、 $I^2 \stackrel{\text{def}}{=} I_x^2 + I_y^2 + I_z^2$ である。つまり、量子論的には、式(2.10)のハミルトニアン H から、

$$i\hbar \frac{dI^2}{dt} = [I^2, H] = 0 \quad (2.16)$$

であり、古典論的には、式(2.15-a) ~ (2.15-c) から、

$$\frac{dI^2}{dt} = 2(I_x \frac{dI_x}{dt} + I_y \frac{dI_y}{dt} + I_z \frac{dI_z}{dt}) = 0 \quad (2.17)$$

であることが証明される。

3. 核四重極子の運動

数学的取扱いを簡単にするため、

$$x(t) \stackrel{\text{def}}{=} I_x(t), \quad y(t) \stackrel{\text{def}}{=} I_y(t), \quad z(t) \stackrel{\text{def}}{=} I_z(t) \quad (3.1)$$

とおく。時間スケールを変えると運動方程式は、

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{3}(\eta+3)yz \quad (3.2-a)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{3}(\eta-3)zx + Kz \sum_m \delta(t-mT) \quad (3.2-b)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2}{3}\eta xy - Ky \sum_m \delta(t-mT) \quad (3.2-c)$$

ここで K は、外場の強さを表すパラメータである。この運動方程式の保存量は、 $x^2 + y^2 + z^2$ である、この量の値を、簡単化のために1とおく。すると系の運動は、半径1の球面上に束縛される。

3.1 外場のある場合 ($K \neq 0$ の場合)

運動方程式を $t=nT-\epsilon$ から $t=(n+1)T-\epsilon$ までは時間 t で周期 T にわたって積分することによって3次元の逐次写像 (Poincaré map) を構成する。 $\eta=0$, $K \neq 0$ の場合の運動方程式は、

$$\frac{dx}{dt} = -yz \quad (3.3-a)$$

$$\frac{dy}{dt} = zx + Kz \sum_m \delta(t-mT) \quad (3.3-b)$$

$$\frac{dz}{dt} = -Ky \sum_m \delta(t-mT) \quad (3.3-c)$$

である。

摂動の時間周期が T であることから、独立変数の時間 t を以下のように区間に分けて、解を求める。

(i) $nT-\epsilon \leq t \leq nT+\epsilon$

ここで、 n は整数であり、 ϵ は微小量で、計算の後で $\epsilon \rightarrow +0$ とおく。右極限値と左極限値を区別するために、 $z'_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} z(nT+\epsilon)$, $z_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} z(nT-\epsilon)$ とグッシュ記号をつけて区別する。 $x(t), y(t)$ についても同様である。この区間では、デルタ関数の寄与がある。まず微分方程式(3.3-a)を、区間 $[nT-\epsilon, nT+\epsilon]$ で積分すると、

$$x'_n = x_n \quad (3.4)$$

で、 $x(t)$ は時刻 nT で連続であることがわかる。

つぎに微分方程式(3.3-b), (3.3-c) から

$$y'_n = y_n + \frac{1}{2}K(z'_n + z_n) \quad (3.5)$$

$$z'_n = z_n + \frac{1}{2}K(y'_n + y_n) \quad (3.6)$$

が得られる。また式(3.5)と(3.6)から、

$$y'_n = \frac{1}{1 + (\frac{1}{2}K)^2} \times \{ [1 - (\frac{1}{2}K)^2] y_n + K z_n \} \quad (3.7)$$

$$z'_n = \frac{1}{1 + (\frac{1}{2}K)^2} \times \{ -K y_n + [1 - (\frac{1}{2}K)^2] z_n \} \quad (3.8)$$

を得る。この式から $y(t)$ と $z(t)$ とは、時刻 nT で不連続であることがわかり、この時刻での微分係数は存在しない。

一方、(3.4)で述べたように $x(t)$ は、時刻 nT で連続である。しかしながら、この時刻での微分係数は、不連続になる。これは、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \dot{x}(nT-\epsilon) = -y_n z_n \quad (3.9)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \dot{x}(nT+\epsilon) = -y'_n z'_n = \frac{-1}{[1 + (\frac{1}{2}K)^2]^2}$$

$$\times \{ K [1 - (\frac{1}{2}K)^2] (z_n^2 - y_n^2) + [1 - 5(\frac{1}{2}K)^2] y_n z_n \} \quad (3.10)$$

であることから証明される。ここで \cdot は時間 t に関する微分である。

しかし、 $x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = z_n^2 + y_n^2 + z_n^2 \quad (3.11)$

が成立することは、簡単に証明できる。

(ii) $nT+\epsilon \leq t \leq (n+1)T-\epsilon$

この区間では、デルタ関数は0、つまり $\delta(t-nT) = 0$ であることに注意する。 x と y の解は、

$$x(t) = \{ x'_n \cos(z'_n nT) + y'_n \sin(z'_n nT) \}$$

$$\begin{aligned} & \times \cos(z'_n t) \\ & + \{x'_n \sin(z'_n n T) - y'_n \cos(z'_n n T)\} \\ & \times \sin(z'_n t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} y(t) = & \{x'_n \cos(z'_n n T) + y'_n \sin(z'_n n T)\} \\ & \times \sin(z'_n t) \\ & + \{x'_n \sin(z'_n n T) - y'_n \cos(z'_n n T)\} \\ & \times \cos(z'_n t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

となる。すると、

$$\begin{aligned} x_{n+1} \stackrel{\text{def}}{\underset{\epsilon \rightarrow +0}{\lim}} x[(n+1)T - \epsilon] \\ = & \{x'_n \cos(z'_n n T) + y'_n \sin(z'_n n T)\} \\ & \times \cos[z'_n(n+1)T] \\ & + \{x'_n \sin(z'_n n T) - y'_n \cos(z'_n n T)\} \\ & \times \sin[z'_n(n+1)T] \\ = & x'_n \cos(z'_n T) - y'_n \sin(z'_n T) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} \stackrel{\text{def}}{\underset{\epsilon \rightarrow +0}{\lim}} y[(n+1)T - \epsilon] \\ = & \{x'_n \cos(z'_n n T) + y'_n \sin(z'_n n T)\} \\ & \times \sin[z'_n(n+1)T] \\ & - \{x'_n \sin(z'_n n T) - y'_n \cos(z'_n n T)\} \\ & \times \cos[z'_n(n+1)T] \\ = & x'_n \sin(z'_n T) + y'_n \cos(z'_n T) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$z_{n+1} \stackrel{\text{def}}{\underset{\epsilon \rightarrow +0}{\lim}} z[(n+1)T - \epsilon] = z'_n \quad (3.16)$$

となる。ここで、

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 + z_{n+1}^2 = x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 \quad (3.17)$$

が、成立していることに注意する。また Jacobian の値は、簡単な計算により、

$$\frac{\partial(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})}{\partial(x_n, y_n, z_n)} = 1 \quad (3.18)$$

である。ここで非線形写像 P を

$$P: (x_n, y_n, z_n) \mapsto (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) \quad (3.19)$$

で定義すると、この写像は Poincaré 断面上で定義された可逆な保測変換である。

4. Poincaré Map

運動方程式に付随する Poincaré map は解析的に求められることはまれで、数値計算によって求められる。これに対し、パルス形の摂動のある核四重極子の場合は解析的に構成できる。Poincaré 断面上の点から点への運動は元々の相空間での運動と位相的に同等である。例えば、非線形方程式系の周期解を、Poincaré 断面上で考えると周期解は固定点になることを使うと、周期解の分岐を調べることができる。

4.1 非線形写像の構造

非線形写像

$$P: (x_n, y_n, z_n) \mapsto (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$$

は 2 つの写像演算子の積 QR に分解することができる。

ここで演算子 R は、

$$\mathbf{x}'_n = R(\mathbf{x}_n) \quad (4.1)$$

で定義される線形演算子で、その行列表現は、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 - (\frac{1}{2}K)^2}{1 + (\frac{1}{2}K)^2} & \frac{K}{1 + (\frac{1}{2}K)^2} \\ 0 & \frac{-K}{1 + (\frac{1}{2}K)^2} & \frac{1 - (\frac{1}{2}K)^2}{1 + (\frac{1}{2}K)^2} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

であり、この行列式の値は、 $\det[R] = 1$ である。ここでベクトル $\mathbf{x}_n, \mathbf{x}'_n$ はそれぞれ $(x_n, y_n, z_n), (x'_n, y'_n, z'_n)$ である。Jacobian の値は、

$$\frac{\partial(x'_n, y'_n, z'_n)}{\partial(x_n, y_n, z_n)} = 1 \quad (4.3)$$

である。また R はベクトル \mathbf{x}_n を、以下のように定義される角度 θ_R だけ、 $-x$ 軸の周りに回転する演算子である。

$$\cos \theta_R = \frac{1 - (\frac{1}{2}K)^2}{1 + (\frac{1}{2}K)^2} \quad (4.4)$$

$$\sin \theta_R = \frac{K}{1 + (\frac{1}{2}K)^2} \quad (4.5)$$

演算子 Q は、 $\mathbf{x}_{n+1} = Q(\mathbf{x}'_n)$ で、次のように定義される非線形演算子である。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x'_n \cos(z'_n T) - y'_n \sin(z'_n T) \\ y_{n+1} &= x'_n \sin(z'_n T) + y'_n \cos(z'_n T) \\ z_{n+1} &= z'_n \end{aligned} \quad (4.6)$$

Q は角度 $\theta_Q = z'_n T$ だけベクトル \mathbf{x}'_n を z 軸の周りに回転する非線形演算子である。Jacobian の値は、

$$\frac{\partial(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})}{\partial(x'_n, y'_n, z'_n)} = 1 \quad (4.7)$$

である。

単位球面は P の軌道に沿って不変であるので、

$$\|\mathbf{x}_n\|^2 = \|\mathbf{x}'_n\|^2 = \|\mathbf{x}_{n+1}\|^2 = 1 \quad (4.8)$$

が成立する。

4.2 固定点, 周期点, 変分方程式

いま初期値 $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^3$ を満たす式

$$\mathbf{x}_{n+1} = P(\mathbf{x}_n) \quad (4.9)$$

の解を

$$\mathbf{x}_n = \Phi(n, \mathbf{x}_0) \quad (4.10)$$

と書くことにする。こうすると

$$\mathbf{x}_n = P^n(\mathbf{x}_0) = \Phi(n, \mathbf{x}_0)$$

である。

非線形演算子 P の固定点 \mathbf{x} を

$$\mathbf{x} = P(\mathbf{x}) \quad (4.11)$$

で定義する。また点 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ が $\mathbf{x} = P^2(\mathbf{x}) = P(P(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq P(\mathbf{x})$ を満たすとき、この点を 2-周期点という。 p -周期点も同様に定義される。

$K \neq 0$ のとき、固定点の方程式は次の超越連立方程式になる。

$$\begin{aligned} x \sin\left(\frac{1}{2} z T\right) + \frac{1}{2} K z \cos\left(\frac{1}{2} z T\right) &= 0 \\ x^2 + \left[1 + \left(\frac{1}{2} K\right)^2\right] z^2 &= 1 \\ y &= -\frac{1}{2} K z \end{aligned} \quad (4.12)$$

自明の解は、

$$(x, y, z) = (\pm 1, 0, 0) \quad (4.13)$$

である、これは、パルス磁場が x 軸方向にかかり、次のパルスまでの間、核運動量ベクトルが z 軸の周りに z に比例した角振動数で回転するという物理的考察からも得ることができる。

簡単にするために $K = T$ とおくと、 x と y は方程式 $F(x, y) = x \sin y + y \cos y = 0$ を満たす、図 1 は $F(x, y) = 0$ のグラフである。図から、3 個の曲線が存在することが分かる。一般に y は x の多価関数である。 $y = 0$ のとき自明な解に対応する、写像 P の固定点の分岐

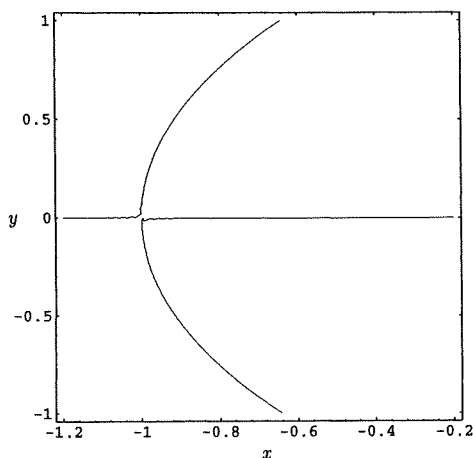


図 1 $F(x, y) = x \sin y + y \cos y = 0$ の等高線

について調べるために式 (4.12) を解いて調べるのは賢明でない。写像 P の固定点や周期点を見つけるために、ここでは写像の式とその変分方程式を連立させて Newton 法を用いてこれらを計算することを考える。固定点も周期点も計算法は同じである。上に述べたように、一般に、パラメータ K, T の組に対して 4 個の固定点が存在する。この 4 個の固定点をすべて求めるためには Newton 法の初期条件をうまく選んで逐次近似列を構成するとよい。自明な固定点 $(1, 0, 0)$ に対しては、Newton 法の Jacobi 行列が退化する場合がある。

初期値 $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^3$ を満たす式 (4.9) の解を $\mathbf{x}_n = \Phi(n, \mathbf{x}_0)$ とする。初期値を $\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\xi}_0$ と変化させたとき、式 (4.9) の解はどのように変化してやろうか。もとの式 (4.9) の無限に近い 2 つの解の差が、 $\|\boldsymbol{\xi}\|$ の 2 次以上の高位の無限小の違いで満足する方程式を、この方程式に対する変分方程式という。

$$\mathbf{x}_{n+1} + \boldsymbol{\xi}_{n+1} = P(\mathbf{x}_n + \boldsymbol{\xi}_n) = P(\mathbf{x}_n) + DP(\mathbf{x}_n)\boldsymbol{\xi}_n + \dots \quad (4.14)$$

であるから、 $\boldsymbol{\xi}$ に関する漸近展開の主要部

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} = DP(\mathbf{x}_n)\boldsymbol{\xi}_n \quad (4.15)$$

をえる。 $DP(\mathbf{x}_n)$ は P の微分で Jacobi 行列である。式 (4.15) が解 (4.10) の初期値に関する変分方程式である。式 (4.15) は、見方を変えると、解 (4.10) の初期値に関する漸化式である。すなわち

$$\begin{aligned} \Phi(n+1, \mathbf{x}_0) &= P(\Phi(n, \mathbf{x}_0)) \\ \Phi(0, \mathbf{x}_0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

の両辺を \mathbf{x}_0 で微分して

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_0}(n+1, \mathbf{x}_0) = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}_n} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_0}(n, \mathbf{x}_0) \quad (4.17)$$

をえる。したがって微分 $X_n = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_0}(n, \mathbf{x}_0)$ は、行列漸化式

$$X_{n+1} = DP(\mathbf{x}_n)X_n \quad (4.18)$$

の解である。ただし、 X_n は初期値

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_0}(0, \mathbf{x}_0) \\ &= \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}_0} = I \end{aligned} \quad (4.19)$$

を満たす。

p -周期点の満たす方程式は

$$F(\mathbf{x}) = \Phi(p, \mathbf{x}) - \mathbf{x} = 0 \quad (4.20)$$

で与えられるから、これを Newton 法で解く。Newton 法に必要な Jacobi 行列は

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}(p, \mathbf{x}) - I \quad (4.21)$$

であるから、Newton法の逐次近似列

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{h}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_n)\mathbf{h} = -F(\mathbf{x}_n) \quad (4.22)$$

がうまく定義できればよい。Jacobi行列は変分方程式(4.18)を使って計算できる。したがって、式(4.20)と(4.18)を連立させて数値計算し、必要な項を求めればよい。変分方程式は線形であるが、係数は特定の解 \mathbf{x}_n の関数であるので、通常、解析的な解を与えることはできないことに注意する。

単位球面は写像 P の積分である。一方、式(4.22)によって構成される逐次近似列は単位球面上から出発しても単位球面上に束縛されない、そこで逐次近似列が常に単位球面上に存在するように束縛条件を加えて式(4.22)を修正しなければならない。

4.3 固定点の安定性

相空間での周期解は周期ごとにPoincaré写像を取ると、それらの点は各々固定点になる。これを使って、周期解の安定性を調べる。

無限小の摂動が加えられたときに、もとの閉軌道は安定であるか、という問題を考える。ここでは初期条件をわずかに変えても、その変化が常に減衰してしまう意味での安定性を考える。微小な初期変化が一周期後にどうなっているかを調べるには、変分方程式(4.15)を調べればよい。さて、 \mathbf{u} を式(4.10)の固定点とする。このとき $\mathbf{u} = P(\mathbf{u}) = \Phi(1, \mathbf{u})$ 成り立つから、任意の n について

$$\mathbf{u}_n = \Phi(n, \mathbf{u}) = \mathbf{u} \quad (4.23)$$

となる、したがって変分方程式は定数係数線形漸化式になる。

$$\xi_{n+1} = M\xi_n$$

$$M = \left. \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{u}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}(1, \mathbf{u}) \quad (4.24)$$

で、 M はFloquet行列とも呼ばれる。 M の固有値は、周期解の安定性を決める、 m 周期後のずれは $M^m \xi_0$ であるから、Floquetの定理により、 M の固有値が単位円の内側に含まれている場合には、ずれは指数関数的に減少していくので、周期解は安定である。このようにFloquet行列の固有値が単位円の内にいるか、外にあるかに対応して、周期解の安定性が決まる。

写像 P のパラメータの1個を固定し、残りの一つを

選んで変化させ、パラメータはスカラー μ と考える。パラメータ μ を少しずつ変えてゆくと、一般に固有値も次第に変化する、それに応じて行列 M が変わり、結果としてその固有値も μ の値によって変化する。各々の固有値は、 μ をパラメータとして複素平面上に一つの軌跡を描く、その軌跡が単位円と交差するときの μ の値で周期解が安定性を失い、解の分岐が生じる、単位円との交差は $+1$ と -1 および複素共役の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ で $|\lambda|=1, \lambda^{-1}=\bar{\lambda}$ の基本的に3つである。

$+1$ の交差の場合に生じるのは、saddle-nodeの分岐が生じる。接線分岐(tangent bifurcation)という。分岐点より上では周期解自体が存在しなくなり、タイプIの間欠性(intermittency)⁸⁾と呼ばれる現象が発生する。つまり、ほとんど周期的とみなせる運動(層流的な相 laminar)が長く続き、それが突発的な全く無秩序な運動(乱流的な相 burst)によって乱される現象である。こうして、周期状態から、正のLyapunov数をもつカオス的な状態への間欠性遷移がおこる。

-1 の交差の場合に生じるのは、いわゆる分数調和波的な分岐で、supercriticalな分岐と、subcriticalな分岐の二つがある。supercriticalな分岐では安定周期解の周期が1, 2, 8, ...と倍々になる。これを周期倍加現象(period doubling)と呼ぶ。それが無限に続いた後にカオスが発生する。一方、subcriticalな分岐では、やはり、タイプIの間欠性と同様に、周期的な層流相がカオス的な乱流相で乱される現象が生じる。しかし、ここでは分数調和波的振動の振幅が増大してゆくのが特徴である。これをタイプIIIの間欠性という。

最後は、二つの共役複素数 $\alpha \pm i\beta$ が同時に単位円と交差する場合で、これは、Hopf分岐と呼ばれる。Hopf分岐がsupercriticalに生じると、新しい、limit cycleが生じる。実際の相空間ではこれは2次元トラスであって、運動は準周期的になる。パラメータが増加して、次のHopf分岐が生じると、同じメカニズムでこの T^2 トラスから T^3 トラスが分岐する。もし、Hopf分岐がsubcriticalに生じると、いわゆるタイプIIの間欠性の現象が出現する。

4.4 Lyapunov指数

相空間でのカオス的運動はさまざまなやり方で特徴づけることができる。少なくとも、初期条件への鋭敏性といわれる特性を示さなければならない。より具体的に述べると、 $\mathbf{x}_1(t; \mathbf{x}_1^0), \mathbf{x}_2(t; \mathbf{x}_2^0)$ を

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (x \in R^3) \quad (4.25)$$

の $x_0^k (k=1, 2)$ を初期条件とする 2 つの解とする。それらの初期条件が互いに無限に近いとき、それらの解が平均で時間的に指数的な割合で分離していくならば、系は初期条件に鋭敏であるという。ある解 $x(t)$ とそれに無限に近い第 2 の解 $x(t) + \epsilon z(t)$ を考察し、 ϵ が無限小であることを使って、 ϵ の漸近級数に展開すると

$$\frac{dx}{dt} + \epsilon \frac{dz}{dt} = f(x) + \epsilon \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x(t)} z(t) + \dots \quad (4.26)$$

すなわち

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x(t)} z(t) \quad (4.27)$$

をえる。この方程式は式 (4.25) の変分方程式である。

ほとんどの初期条件 $z(0)$ に対して、 $z(t)$ の大きさが、大きな t に対して指数的に増大するときのみ、カオスである。これは

$$\lambda(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|z(t)\| \quad (4.28)$$

の形に表すことができる。変分方程式は線形であるが、係数は特定の解 $x(t; x_0)$ の関数であるので、通常、解析的な解 $z(t)$ をえることはできない。式 (4.28) によって定義された量入は Lyapunov 指数と呼ばれる。Lyapunov 指数は、変分方程式で用いられている非線形方程式 (4.25) の特定の解、すなわち、初期条件 x_0 に依存していることに注意する。

もし一群の解が、相空間の同じエルゴード的部分集合に漸近的に吸引されていけば、これらの Lyapunov 指数はすべて同じである。

パルス形の摂動のある核四重極子の場合 Poincaré map を解析的に構成できるので写像 P の一つの軌道 $\gamma = \{x_n = P^n(x_0)\}$ に対する Lyapunov 指数を

$$\lambda_\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \sum_{k=0}^{n-1} \log \left\| \frac{\partial P(x_k)}{\partial x_k} \right\| \quad (4.29)$$

で定義すればよい。

式 (4.29) で定義される Lyapunov 指数は最大 Lyapunov 指数と呼ばれ、それは、 R^3 における 3 個の指数の一つに過ぎない。他のどれも値がそれよりも大きくない。一般に n 変数の系には n 個の組の Lyapunov 指数 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ が存在する。多くの場合、最大 Lyapunov 指数が正ならば、その系はカオスであるといわれる。

すべての Lyapunov 指数を数値的に求める方法は

色々ある^{3), 10)}、我々は式 (4.9) と (4.18) を連立して解くのに、ベクトルの再規格化と同時に Gram-Schmidt 法を用いてベクトルを直交化する Wolf *et al.*¹⁰⁾ の Fortran プログラムを改造したものを使った。

5. 数値計算

$(K, T) = (1.0, 4.0)$ のとき、自明な固定点 $(\pm 1, 0, 0)$ と自明でない固定点 $(0.0949667, \pm 0.4444836, \mp 0.890563)$ の 4 個の固定点を求めることができる。一方、 $(K, T) = (4.0, 4.0)$ のとき自明でない固定点 $(-0.9999998, \pm 0.000527, \mp 0.000264)$ に収束する逐次近似解の構成は難しい。多くの初期値に対して近似解は、自明な解に収束する。このことは図 1 から推測できる。

2-周期点が存在するが 3-周期点以上は見つっていない。例えば、 $(K, T) = (1.0, 4.0)$ のとき $x_\pm = (\pm 0.478474, -0.392699, 0.785398)$ は 2-周期点で、 $P(x_\pm) = x_\mp, P(x_\mp) = x_\pm$ を満たす。このように、符号の変換だけを伴う自明な 2-周期点が多いが、自明でない 2-周期点も存在する。

第 4.3 節で固定点の安定性について述べたように、いまパラメータとして、 $T=4$ に固定して、 K を変化させる。Floquet 行列 M の固有値は K をパラメータとして複素平面上に一つの軌跡を描く。その軌跡が単位円と交差するときの K の値で周期解が安定性を失い、解の分岐が生じる。単位円との交差点は、基本的に $+1$ と -1 および $\lambda = \alpha \pm i\beta$ 点である。 $x_{n+1} = P(x_n)$ については、二つのタイプのみ生じる。まず最初に行列 M は常に固有値 1 をもっていることに注意する。この固有値は周期解の安定性には関係ない。以後残りの二つの固有値についてのみ記す。また写像 P は可逆な保測変換であるから、 M の残りの固有値を λ_1, λ_2 とすると、 $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ を満たす。したがって Hopf 分岐はこのモデルでは生じない。

まず自明な固定点について述べる。 $(K, T) = (0.7646, 4.0)$ のとき、固定点 $(1, 0, 0), (-1, 0, 0)$ の固有値は、それぞれ $3.901141, 0.256335$ と $-0.589235 \pm i0.807962$ である。

$(K, T) = (1.0, 4.0)$ のとき、固定点 $(1, 0, 0), (-1, 0, 0)$ の固有値は、それぞれ $-1.0, -1.0$ と $4.159592, 0.240408$ である。固定点 $(1, 0, 0)$ では分数調和波的分岐が生じる。

$(K, T) = (4.0, 4.0)$ のとき、固定点 $(-1, 0, 0), (1, 0,$

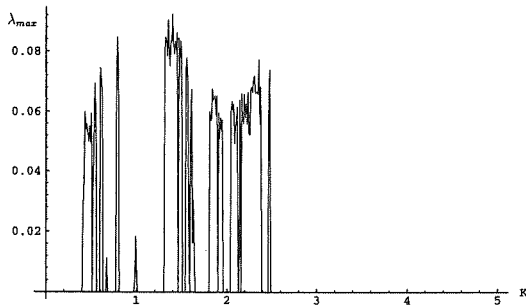


図2 (a) Lyapunov 指数 $K=2.5, T=4.0$

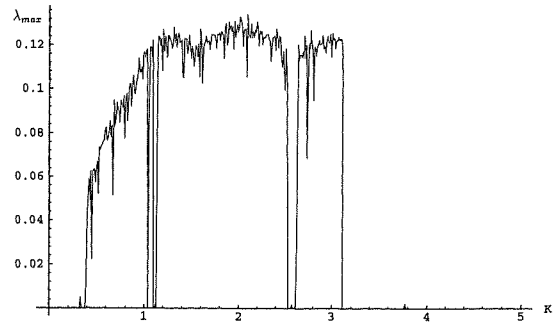


図2 (b) Lyapunov 指数 $K=3.25, T=4.0$

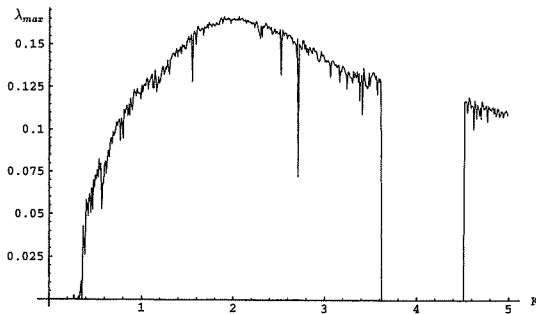


図2 (c) Lyapunov 指数 $K=4.0, T=4.0$

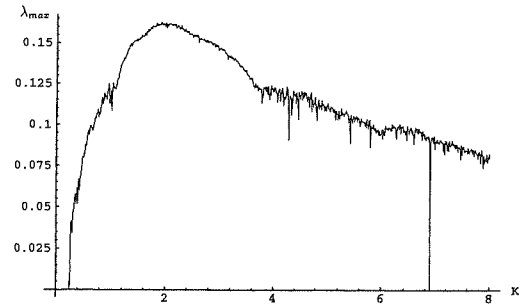


図2 (d) Lyapunov 指数 $K=6.0, T=4.0$

0)の固有値は、それぞれ1.0, 1.0と $-4.159592, -0.240408$ である。固定点 $(-1, 0, 0)$ で接線分岐が生じる。

$(K, T)=(4.515, 4.0)$ のとき、固定点 $(-1, 0, 0), (1, 0, 0)$ の固有値は、それぞれ $0.809292 \pm i0.587406$ と $-4.06220, -0.246292$ である。

自明でない固定点についても同様である。 $(K, T)=(0.7646, 4.0)$ のとき、固定点 $(0.104833, \mp 0.355127, \pm 0.928921)$ の固有値は $-1.0, -1.0$ で分数調和波的な分岐が生じる。

Lyapunov 指数は、0.01刻みの K の値を用いて、3つの成分を計算し、最大 Lyapunov 指数 λ_{max} 対 K の図2 (a), (b), (c), (d) をえた。ここで初期値は

$$x_0 = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y_0 = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

である。 λ_{max} の各値は 5×10^4 回の写像を用いて計算

した。 5×10^4 回の写像を用いても変わらない。 P は保測写像であるから Lyapunov 指数の3つの成分の和は零であり、最大 Lyapunov 指数は非負であることに注意する。 $T=2.5, 3.25, 4$ のとき、比較的広いパラメータの窓をもっている。窓の数はパラメータ T の値が大きくなると少なくなり、 $T \geq 6.0$ では見られない。Poincaré 断面で閉曲線になることから準周期解に対応する窓であることが分かる。正の Lyapunov 指数を持つ集合、したがって、初期条件に鋭敏である集合が存在する、この集合上ではカオスの状況である。

カオスを生ずる系では、系のパラメータを変化させると、非カオス-カオス間の転移を起こす。このカオスへの移り方について考察する。図2 (c) から、 $K=4.5$ 付近でカオスに転移している。 $K=4.51$ のとき、 $\lambda_{max}=0$ 、 $K=4.52$ のとき、 $\lambda_{max}=0.1176$ である。

図3 (a), (b), (c), (d) は写像 $x_{n+1} = P(x_n)$ の x_n の x 成分を写像の回数 n の関数として表したものである。図3 (a) は安定な周期的状態 (層流的相) を示す。図3 (b) では、周期的変動が約4,300回の写像の後、突発的に乱れが発生し、その周期的変動が中断さ

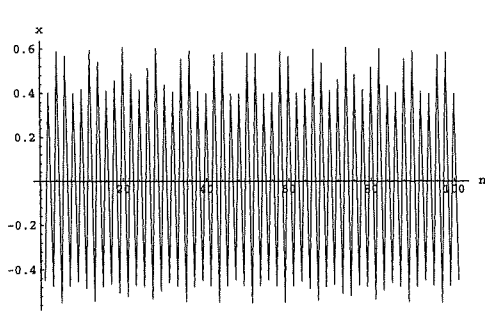


図3 (a) $K=4.5140, T=4.0$ のときの規則的振動

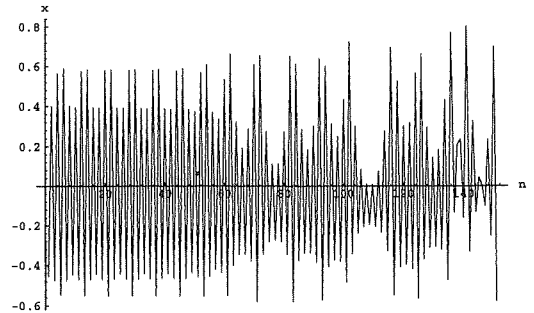


図3 (b) $K=4.5145, T=4.0$ のときの規則的振動と発生した乱れ

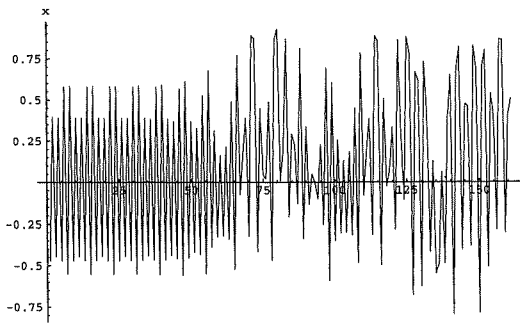


図3 (c) $K=4.5150, T=4.0$ のときの規則的振動と発生した乱れ

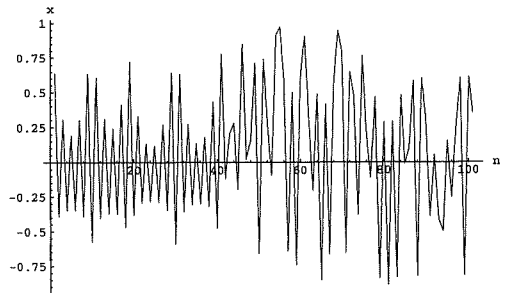


図3 (d) $K=4.5200, T=4.0$ のときのカオス的流れ

れている。図3 (c) では、乱れが発生する時刻は約3,000回の写像の後であり、乱れも激しくなっている。 $(K, T)=(5.415, 4.0)$ のとき、2-周期点 $x_{\pm} =$

$(\pm 0.511968, \pm 0.3479606, \pm 0.785398)$ と $y_{\pm} = (-0.102131, \pm 0.402893, \pm 0.909531)$ が存在し、その固有値はそれぞれ $-0.150157 \pm i0.988662$ と 1.881180 ,

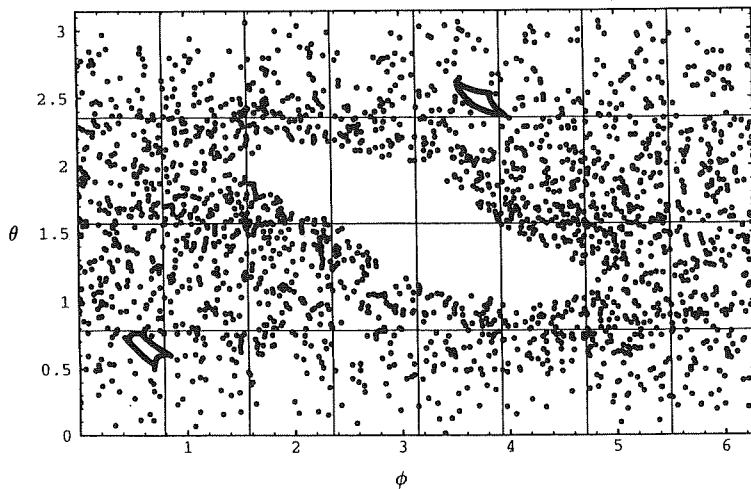


図4 Poincaré map $K=4.5150, T=4.0, n=5000$

0.531581である。図4のPoincaré mapは、この安定な2-周期点まわりの準周期解(層流的相)がカオス状態に遷移中であることを示す。図3(d)は、正のLyapunov指数を持つカオス状態を表す。

点 $(K, T)=(5.415, 4.0)$ の近傍には、少なくとも二つの安定な周期解と二つの不安定な周期解が存在し、不安定な周期解は、Poincaré mapのsaddle固定点と2-周期点である。saddleの近くでは、不安定な周期解に出入りする不変曲線が絡みあってhomoclinic tangleとして知られる現象が生じ、カオスを作っていると考えられる。

参 考 文 献

- [1] V. I. Arnold and A. Avez, "Ergodic Problems of Classical mechanics", Benjamin 1968.
- [2] J. Bell, "Speakable and unspeakable in quantum mechanics", Cambridge, 1987.
- [3] Bennetin, G., Giorgilli, A. & Strelcyn, J. -M., "Lyapunov characteristic exponents for smmoth dynamical systems and for Hamiltonian ststems", *Meccanica* **15**, 9 (1980)
- [4] P. Berge, Y. Pomeau and C. Vidal, "Order within chaos", John Wiley & Sons, 1986. (P. ベルジェ, Y. ポモウ, C. ビダール「カオスの中の秩序」相澤洋二訳, 産業図書, 1992)
- [5] B. V. Chirikov, "A universal instability of many-dimensional oscillator system", *Phys. Rep.* **52** (1979) 265.
- [6] G. Floquet, "Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, *Ann. École Norm. ser. 2*, **12** (1883) 47-89.
- [7] E. Ott, "Chaos in dynamical systems", Cambridge, 1993.
- [8] Y. Pomeau and P. Manneville, "Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems", *Commun. Math. Phys.* **64** (1981) 189.
- [9] 時田, 川畑, 池田, 西原, "古典的核4重極子の運動", 福岡工業大学言語情報工学研究所彙報, 第5巻 (1994) 73-184
- [10] Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., & Vastano, J., "Determining Lyapunov exponents from time series", *Physica*, **16D**, 285-317 (1985)