n変数多項式が閉か否かを判定するアルゴリズムについて

n 変数多項式が閉か否かを判定するアルゴリズムについて

池　田　和　生（一般教養自然系）
西　原　政　治（福岡工業短期大学）

On an Algorithm for testing closed polynomials in $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$

Kazuo IKEDA (Department of Mathematics)
Masaharu NISHIHARA (Fukuoka Junior College of Technology)

Abstract

Let $R=k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ denote the ring of all polynomials in n variables with coefficients in a field k. A polynomial f is called closed when there does not exist a polynomial g in R such that $k[f] \subset k[g] \subset R$. This paper gives an Algorithm for testing whether f is closed or not when k has characteristic zero. Moreover if f is not closed then we can compute g such that $k[f] \subset k[g] \subset R$ from this Algorithm.

Key words : *Algorithm, polynomial ring, closed polynomial, term order.*

1．まえがき

体 k 上の n 変数多項式環 $R=k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ の多項式 f を考える。f が閉であるとは $k[f] \subset k[g] \subset R$ となる多項式 g が存在しないことである。Nowicki-Nagata [1] では f が閉であることを環 $k[f]$ が R の中で整閉であることと定義し，そのことと上の定義の同値性を証明している。

我々の目的は k を標数 0 の体とするとき，与えられた n 変数多項式 f が閉であるか否かを判定するアルゴリズムを示すことである。この判定アルゴリズムはもし f が閉でなければ具体的に $k[f] \subset k[g] \subset R$ となる多項式 g を計算するアルゴリズムでもある。

平成 7 年 5 月31日受付

2．項順序と除法

n 変数多項式環 R は $n=1$ の場合は，割り算が行える。すなわち R の元 $f, g \neq 0$ に対し，$f=gh+r, \deg r < \deg g$ となる h と r が求められるが，$n \geq 2$ の場合はこのような算法は一般には成立しない。しかしながら，変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ のべき積の集合 $\mathbf{T}^n=\{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha_i \in \mathbf{N}, i=1,2,\cdots n\}$ に次の条件をみたす全順序 $<$ を導入することにより，R に除法を定義することができる。

定義 2．1　次の 2 条件をみたす $\mathbf{T}^n$ における全順序 $<$ を，$\mathbf{T}^n$ における項順序という。

1．$\mathbf{T}^n \ni \forall X \neq 1$ について $1 < X$ が成立する。
2．$\mathbf{T}^n \ni X, Y$ について $X < Y$ ならば，$\mathbf{T}^n \ni \forall Z$ に対して $XZ < YZ$ が成立する。

上の定義をみたす $\mathbf{T}^n$ の項順序は幾通りも存在し得るが，標準的な項順序の一つとして次の全次数順序（全次数辞書式順序）といわれるものがある。

定義 2．2　R の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の間に，順序 $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ を入れておく。
$\mathbf{T}^n \ni X, Y$ を $X = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $Y = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}$ とするとき，次で定義される $\mathbf{T}^n$ における全順序を，$x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ とする全次数順序という。

$$X < Y \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i < \sum_{i=1}^n \beta_i \\ \text{または} \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \text{ で } \alpha_i \neq \beta_i \text{ となる最初} \\ \text{の } i \text{ について } \alpha_i < \beta_i \end{cases}$$

$\mathbf{T}^n$ に，ある項順序を与えることにより，R の多項式 f の項の間に順序をつけることができる。この順序において，最高位にある項を f の主要項といい，$lt(f)$ とかく。また主要項から係数を取り除いたべき積を主べき積といい，$lp(f)$ とかく。

定義 2．3　$R \ni f, g \neq 0$ について，$lp(g)$ が f のある項 X を割るとき，次の操作で f から X を取り除いた多項式を h とする。

$$h = f - \frac{X}{lt(g)} g$$

h の項の中にまだ $lp(g)$ で割れる項が存在するときは，すべての項が $lp(g)$ で割れなくなるまでこの操作を続け，最終的に求まった h を，f を g で割ったときの余りという。

上の操作は X のとり方に任意性があるが，単項イデアル $<g>$ においては g はグレブナ基底であるから，余りは一意的であることが知られている。（参考文献 [2] chap.1）

例 2．1　$R = \mathbf{Q}[x, y, z]$ とする。$R \ni f = x^2y + y^2z + xy + x$, $g = xz - yz - y$ をとる。
$\mathbf{T}^3$ に $x > y > z$ として全次数順序を与えると，$lp(g) = xz$ となり f は g で割れない。
$\mathbf{T}^3$ に $y > x > z$ として全次数順序を与えると，$lp(g) = yz$ となり f の項 y^2z が $lp(g)$ で割れて

$$h_1 = (y^2z + x^2y + xy + x) - \frac{y^2z}{-yz}(-yz + xz - y)$$
$$= x^2y + xyz - y^2 + xy + x$$

となる。更に

$$h_2 = (x^2y + xyz - y^2 + xy + x) - \frac{xyz}{-yz}(-yz + xz - y)$$
$$= x^2y + x^2z - y^2 + x$$

となり，$h_2 = x^2y + x^2z - y^2 + x$ が f を g で割ったときの余りである。

$\mathbf{T}^n$ にどのような項順序を与えても，$\mathbf{T}^n$ の元の無限減少列は存在しないことが知られている。$x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ として全次数順序を与えた場合は，$X = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ 以下のべき積の数 S は有限で，次式より求まる。

$$S = {}_{n+1}H_\nu - \sum_{i=1}^{n-1} {}_{n+1-i}H_{\nu-1-\alpha_1-\cdots-\alpha_i} \tag{1}$$
$$(\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$$

以後においては，$\mathbf{T}^n$ にはある全次数順序が与えられているとし，R の元 f を多項式として具体的に表現する場合，そこに並ぶ項はこの項順序によって大きいものから順に並べるものとする。また主要項 $lt(f)$ の係数が 1 である多項式をモニックとよぶ。

3．特別な場合の判定法

まず f が閉でない場合に何をいえばよいかを考える。

f が閉でない。
$\Leftrightarrow k[f] \subset k[g] \subset R$ となる g が存在する。
$\Leftrightarrow f = a_0g^l + a_1g^{l-1} + \cdots + a_{l-1}g + a_l$ となる。
$g \in R$, $a_0, \cdots, a_l \in k$, $a_0 \neq 0$, $l \geq 2$
$\Leftrightarrow f = (\cdots(((a_0g + a_1)g + a_2)g + a_3)\cdots)g + a_l$

また，一般性を失うことなく，次の〈1〉，〈2〉を仮定することができる。

〈1〉　f はモニックとする。
　　f が閉でないとき　g もモニックである。
〈2〉　$f(0) = 0$ とする。
　　f が閉でないとき　g も $g(0) = 0$ である。

したがって，f が閉でないための必要十分条件は，R の定数項を含まないモニック多項式 g が存在し

$$f = g^l + a_1g^{l-1} + \cdots + a_{l-1}g \quad (l \geq 2) \tag{2}$$

となることである。

3．1　g が一次式の場合

f が閉でなく，$g = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$ の形のと

きは，次のようにして容易に判定できる。

$g=b_1x_1+\cdots+b_nx_n,\ f=h(g),\ h\in k[x]$

として，各変数 x_i で偏微分すると

$\partial f/\partial x_i=(df/dg)b_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$

となる。ゆえに各 $\partial f/\partial x_i$ が比例する。このとき比例係数より $b_1,b_2,\cdots,b_n$ が求められる。

例3.1　$f=x^2-4xy+6xz+4y^2-12yz+9z^2-4x+8y-12z$　に対して

$f_x=2x-4y+6z-4$

$f_y=-4x+8y-12z+8$

$f_z=6x-12y+18z-12$

ゆえに　$f_y/f_x=-2,\ f_z/f_x=3$

このとき　$g=x-2y+3z,\ f=g^2-4g$ となり，f が閉でないことが判定できる。

定理3.1　$k[f]\subset k[g]$ となる一次式 g が存在するための必要十分条件は　$\deg(f)\geq 2$ かつ $\partial f/\partial x_i\ (i=1,\cdots,n)$ の比が定数となることである。このとき $(\partial f/\partial x_1:\cdots:\partial f/\partial x_n)=(b_1:\cdots:b_n),\ b_i\in k$ ならば　$g=\sum b_ix_i$ が $k[f]\subset k[g]$ をみたす。

十分性の証明

$(\partial f/\partial x_1:\cdots:\partial f/\partial x_n)=(b_1:\cdots:b_n),\ b_i\in k$ であるならば　$b_i\neq 0$ となる b_i が存在する。

たとえば　$b_1\neq 0$ と仮定するとき　変数変換

$y_1=\sum b_ix_i,\ y_j=x_j\quad(j=2,\cdots,n)$

を行い　$\partial f/\partial y_j=0\quad(j=2,\cdots,n)$ をいえば，f が y_1 だけの関数であることになり，証明が終わる。このことは　$\partial f/\partial y_j=\sum(\partial f/\partial x_i)(\partial x_i/\partial y_j)$ を計算することで確かめられる。

3.2　f の既約分解が判っている場合

f が閉でなければ，g は f の因子であるから g の候補がいくつか見つかり，それらについて

$f=gh_1,\qquad h_1\in R$

$h_1-h_1(0)=gh_2,\quad h_2\in R,\ h_1(0)=a_{l-1}$

$h_2-h_2(0)=gh_3,\quad h_3\in R,\ h_2(0)=a_{l-2}$

$\cdots$

$h_{l-1}-h_{l-1}(0)=g,\quad h_{l-1}(0)=a_1$

のように逐次 g で割れるかどうかを調べればよい。ここで f は多項式だから g の候補は有限個であり，また割算も有限回で終わる。

例3.2　$f_1=x^4(y+2)^2(x^2y+2x^2-3)$ に対して $(lt(g))^l=lt(f_1)=x^6y^3$ となるのは $l=3,\ lt(g)=x^2y$ となる多項式 g だけが候補となる。（補題4.1参照）　$g=x^2(y+2)=x^2y+2x^2$ のとき $f_1=g^3-3g^2$ となる。ゆえに f_1 は閉ではない。

また $f_2=x^3(y+2)^2(x^2y+2x^2-3)$ に対して $lt(f_2)=x^5y^3$ だから $(lt(g))^l=lt(f_2)$ となる $l\geq 2$ は存在しない。ゆえに f_2 は閉である。

f の既約分解が判っている場合のアルゴリズム

$f=g_1^{t_1}g_2^{t_2}\cdots g_m^{t_m}$, g_i は既約モニック多項式，$f(0)=0$, $t_1+t_2+\cdots+t_m\geq 2$ とする。また，Algorithm 3.1 を Main Algorithm とし，実際に式(2)が成立しているかを確認する Algorithm 3.2 を Sub Algorithm とする。

Algorithm 3.1

INPUT:　$f=g_1^{t_1}\cdots g_m^{t_m}$

OUTPUT:　[f is closed] or

　[$f=g^l+a_1g^{l-1}+\cdots+a_{l-1}g$,

　f is not closed]

INITIALIZATION:　$p:=0,\ l:=0$

　$G:=\{g\mid g=g_1^{s_1}\cdots g_m^{s_m},\ 0\leq s_i\leq t_i,\ 1\leq i\leq m,\ g(0)=0\}$

WHILE　$G\neq\emptyset$ AND $p\neq 1$ DO

　choose any $g\in G$

　$G:=G-\{g\}$

　IF　$\exists\, l\geq 2$ such that $(lt(g))^l=lt(f)$ THEN

　　go to Algorithm 3.2

IF　$p=1$　THEN

　output [$f=g^l+a_1g^{l-1}+\cdots+a_{l-1}g$,

　　f is not closed]

ELSE　output [f is closed]

STOP

Algorithm 3.2

INPUT:　f,g,l from Algorithm 3.1

OUTPUT:　return to Algorithm 3.1

　with $p,a_1,\cdots,a_{l-1}$

INITIALIZATON:

　$h:=f,\ i:=1,\ h_1:=0,\cdots,h_l:=0$

　$a_0:=0,\cdots,a_{l-1}:=0$

WHILE　$i\leq l$　DO

　WHILE　$h\neq 0$　DO

　　IF　$lt(g)\mid lt(h)$　THEN

　　　$h_i:=h_i+(lt(h)/lt(g))$

$h := h - (lt(h)/lt(g))g$
　ELSE　$h := 0, i := l+2$
IF　$i \neq l+2$　THEN
　$a_{l-i} := h_i(0), h := h_i - h_i(0), i := i+1$
IF　$i = l+1$　THEN　$p := 1$
ELSE　$p := 0$
return to Algorithm 3.1

4．一般の場合の判定法

$\mathbf{T}^n$ に設定されている項順序に関して R の多項式 f の主要項を $lt(f) = X_0$ とし，末尾の項を $b_{m'}X_{m'}$ とすると f は

$$f = X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \cdots + b_{m'}X_{m'} \tag{3}$$

と表される。ここで右辺においては，X_0 より小さく $b_{m'}X_{m'}$ より大きい項は，すべて並べているものとする。すなわち，f の項として現れていないべき積 X_i についても $b_i = 0$ として並べている。ここに並ぶ項のうち X_0 より小さいものの数，すなわち m' は，2 の式(1)より求めることができる。

4．1　g の主要項 $lt(g)$ の決定

f が閉でないならば，R の適当な多項式 g と適当な自然数 l が存在し，式(2)が成立している。$lt(g) = Y_0$ とするならば，Y_0 は f の主要項 $lt(f) = X_0$ を用いて次の補題より求まる。

補題4.1　$X_0 = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$, $Y_0 = x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\cdots x_n^{\beta_n}$ とし，$gcd(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = d$ とする。
$d = 1$ ならば，f は閉となる。
$d \neq 1$ ならば，$\gamma_i = \alpha_i/d$ とおき，d のそれ自身とは異なる約数の一つを l' とすると $\beta_i = \gamma_i l' (1 \leq i \leq n)$ となる。

　証明　$Z = x_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}\cdots x_n^{\gamma_n}$ とおくと $X_0 = Z^d$ となる。ここで d の 1 以外の約数の一つを l とし，$l'l = d$ とすると $X_0 = Z^{l'l} = (Z^{l'})^l$，よって式(2)の l をこの l にとると $Y_0 = Z^{l'}$ となる。よって $\beta_i = \gamma_i l'(1 \leq i \leq n)$ となる。$d = 1$ のときは $l = 1$ しかとれないので，$X_0 = Y_0$ となり f は閉となる。

補題4.1の証明において明らかなように，f が閉でない場合，式(2)をみたす可能性のある g と l とは d の 1 以外の約数の個数だけの自由度をもつ。しかしながら項順序を取り替えることにより，ある程度絞り込むことが可能である。また補題 4．1 と同様にして，g の末尾のべき積 Y_m も f の末尾のべき積 $X_{m'}$ を用いて求めることができる。

補題4.1において，$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ が素数のとき，f が閉でないならば $d \neq 1$ であり，適当な i について $\alpha = \alpha_i$ となっている。したがって $X_0 = x_i^{\alpha_i}$, $Y_0 = x_i$ となり，これは前述の 3．1 の場合に当たる。

例4．1　$R = \mathbf{Q}[x, y, z]$ とし，$R \ni f = x^6z^6 - 3x^5y^2z^5 + 3x^4y^4z^4 - x^3y^6z^3 + 3x^5z^5 + \cdots$ とする。
$x > y > z$ として全次数順序を入れると $lt(f) = x^6z^6$ である。よって $d = gcd(6, 0, 6) = 6$ より d の 1 以外の約数は，2, 3, 6 である。
$y > x > z$ として全次数順序を入れると $lt(f) = -x^3y^6z^3$ である。よって $d = gcd(3, 6, 3) = 3$ より d の 1 以外の約数は，3 である。
以上のことから 1 以外の共通の約数として 3 しかとれない。よって，$x > y > z$ として全次数順序を入れた場合，式(2)における l は 3 となり，$lt(g) = x^2z^2$ となる。

4．2　g の各項の係数の決定

4．1 において述べたことから f が閉でない場合，$lt(g) = Y_0$ と g の末尾のべき積 Y_m が求まるので，g を式(3)と同様の形に表示しておく。

$$g = Y_0 + c_1Y_1 + c_2Y_2 + \cdots + c_mY_m \tag{4}$$

式(4)の右辺の各項の係数 c_i は，式(4)を式(2)に代入して展開し，式(3)の対応する項の係数 b_j と比較することにより次の補題から求まる。

補題4．2　$(Y_0 + c_1Y_1 + \cdots + c_{i-1}Y_{i-1})^l$ の展開式の項のうち，べき積が $Y_0^{l-1}Y_i$ と等しいものの係数の和を c とする。f の項でべき積が $Y_0^{l-1}Y_i$ と等しいものを b_jX_j とするならば，

$$c + lc_i = b_j$$

が成立している。よって Y_i の係数 c_i は

$$c_i = (b_j - c)/l$$

と求まる。

　証明　$Y_0^{l-1}Y_i > Y_0^{l-1} = lp(a_1g^{l-1} + \cdots + a_{l-1}g)$ より，式(2)の右辺において $Y_0^{l-1}Y_i$ の同類項は g^l の展開式の中にだけ存在する。また $Y_0^{l-1}Y_i$ は g^l の展開式において Y_i 以下のべき積を含むものの中で，明らかに最大である。よって $Y_0^{l-1}Y_i$ の同類項は $(Y_0 + c_1Y_1 + \cdots + c_{i-1}Y_{i-1})^l$ の展開式の中にしか存在しない。g^l の展開において，$Y_0^{l-1}Y_i$ の係数は $(l!c_i)/((l-1)!1!) = lc_i$ より，$c + lc_i = b_j$ が成立している。これから c_i が

求まるためには c，すなわち $c_1, c_2, \cdots, c_{i-1}$ が既に決定されていなければならないが，それは i についての帰納法により明らかである。

R の多項式 f に対して，補題4.1，4.2を適用して g が求まったとしても，それは f が閉でないことの必要条件でしかない。f が閉でないという判定は，最終的には f を求まった g で l 回割ることにより実際に式(2)が成立していることを確かめる必要がある。しかし，補題4.1，4.2を適用する過程においても，たとえば補題4.1において $d=1$ の場合など，f が閉である判定は行える。

4.3　f が閉であるか否かを判定するアルゴリズム

このアルゴリズムは，次の3つのステップに分けられる。

step 1　補題4.1を適用して f の主要項 X_0，末尾のべき積 $X_{m'}$ より，g の主要項 Y_0，末尾のべき積 Y_m を求める。

step 2　補題4.2を適用して $(Y_0+c_1Y_1+\cdots+c_{i-1}Y_{i-1})^l$ の展開式の中から，$Y_0^{l-1}Y_i$ の同類項を求め，対応する f の項 b_jX_j と比較して，g のべき積 Y_i の係数 c_i を求める。

step 3　step 2 で求まった g で f を割る。

step 3 は 3.2 で示した Algorithm 3.2 が利用できるので，ここでは step1 と step2 のアルゴリズムを述べる。

アルゴリズムにおいて使用されている記号等の注意。

1．$lt_s()$：$\{1, 2, \cdots, n\}$ の順列に番号をつけ，その番号を s で表す。s 番目の順列を $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ とするとき，$x_{i_1} > x_{i_2} > \cdots > x_{i_n}$ とする全次数順序によって得られる主要項を $lt_s()$ で表す。

2．Algorithm step1 において式(2)をみたす l と $lp(g)$ の候補の集合を **LPP** とする。すなわち
LPP$=\{(l, lp(g)) \mid g, l$ は f が閉でないとき式(2)をみたす可能性のある多項式と最高次数$\}$
LPPの計算は，サブアルゴリズム＊l.p.p. で行う。

3．**A**：式(2)をみたす可能性のある l とべき積の集合としての g の組が Algorithm step1 において幾組か求まるが，それらを要素にもつ集合。すなわち　g を $\mathbf{G}=\{Y_i \mid 0 \leq i \leq m\}$ として表し，
$\mathbf{A}=\{(l, \mathbf{G}) \mid \mathbf{G}, l$ は式(2)をみたす可能性のあるべき積の集合と最高次数$\}$
とする。また **A** の要素によって l と m, Y_i は当然異なるが，Algorithm step 2 では煩雑さを避ける意味で同一の l, m, Y_i を使う。

4．$\mathbf{F}, \mathbf{H}, \mathbf{B}_\mu$：単項式を，べき積と係数の組［係数，べき積］として表し，これを要素とする集合。

5．$\mathbf{B}_k Y_i^{k-\mu}$：$\mathbf{B}_k$ の各要素 $[\boldsymbol{\alpha}, W]$ に対して
$[\boldsymbol{\alpha}_{l-\mu}C_{k-\mu}(c_i)^{k-\mu}, WY_i^{k-\mu}]$
を要素にもつ集合。

6．Algorithm step 2 において $Y_0^{l-1}Y_i$ に対応するべき積 X_j の計算と g^l の展開式の中での同類項の計算は，それぞれサブアルゴリズム＊s.t.1，＊s.t.2 で行う。また f が閉でない場合には不適切である項の検出を，サブアルゴリズム＊check で行う。

Algorithm step 1

```
INPUT:  f = X_0 + b_1 X_1 + ... + b_m' X_m',  n
OUTPUT:  [f is closed] or LPP
INITIALIZATION:  C: = ∅, LPP: = ∅, L: = ∅,
                 s: = 1
LP: = {lp_s(f) | 1 ≤ s ≤ n!}
WHILE  LP ≠ ∅  DO
  LP: = LP − {lp_s(f)}
  IF  L ∌ lp_s(f)  THEN
    L: = L ∪ {lp_s(f)}
    FOR  1 ≤ i ≤ n  DO
      a_i := exponent of x_i in lp_s(f)
    d := gcd(a_1, a_2, ..., a_n)
    D := {l | l is divisor of d, l ≠ 1}
    LPP: = LPP obtained from *l.p.p.
    IF  C = ∅  THEN
      flag 1 := 1
    ELSE
      flag 1 := 0
  ELSE
    flag 1 := 0
  IF  flag 1 = 1  THEN
    go out of this WHILE loop
  ELSE
      s := s + 1
IF  flag 1 := 0  THEN
    go to Algorithm step 2
ELSE
    output [f is closed]
STOP
```

```
*l.p.p.
IF  s=1  THEN
    FOR  1≤i≤n  DO
      γ_i:=a_i/d
    Z:=x_1^{γ_1} x_2^{γ_2} … x_n^{γ_n}
    WHILE  D≠∅  DO
      choose any  l ∈ D
      D:=D−{l}
      l':=d/l, Y:=Z^{l'}
      C:=C∪{l}
      LPP:=LPP∪{(l, Y)}
ELSE
    C:=C∩D
    LPP:=LPP−{(l, Y) | l ∉ C}
```

step 1 において，$n!$ 通りのすべての全次数順序について調べているが，項順序を多く変えても主要項は同一になる可能性が高く，現実的には $x_i\,(1\leq i\leq n)$ を最大とする n 通りの全次数順序について調べるだけでよいであろう。また g の末尾のべき積 Y_m を求めるアルゴリズムは $lp(f)$ の代わりに $X_{m'}$ を用いれば同様であるので省略している。

Algorithm　step 2

```
INPUT:  F={[b_j, X_j] | 0≤j≤m'}, A
OUTPUT: [f is closed] or
           H={[c_i, Y_i] | 0≤i≤m}
WHILE  A≠∅  DO
  choose any(l, G) ∈ A
  A:=A−{(l, G)}
  i:=1, j:=1, c:=0, e:=0, H:={[1, Y_0]},
  B_0:=∅, B_1:={[1, Y_0^{l−1}]},…,B_{l−1}:={[1, Y_0]},
  B_l:={[1, 1]}
  WHILE  i≤m  DO
    *s.t.1
    IF  flag 2=1  THEN
        go out of this WHILE loop
    *s.t.2
    c_i:=(b−c)/l
    H:=H∪{[c_i, Y_i]}
    IF  c_i≠0  THEN
        FOR  0≤μ≤l  DO
            B_μ:=∪_{k=μ}^{l} B_k Y_i^{k−μ} − {[l c_i, Y_i]}
    c:=0, i:=i+1
  IF  flag 2=0  THEN
      go out of this WHILE loop
IF  flag 2=0  THEN
  go to Algorithm 3.2
ELSE
  output [f is closed]
STOP
*s.t.1
WHILE  X_j ≥ Y_0^{l−1} Y_i  DO
    F:=F−{[b_j, X_j]}
    IF  X_j = Y_0^{l−1} Y_i  THEN
      b:=b_j, flag 2:=0
    ELSE
        *check
    IF  flag 2=1  THEN
        go out of this WHILE loop
    ELSE
      j:=j+1
*check
IF  b_j≠0  THEN
  E=B_0
  WHILE  E≠0  DO
      choose [c_z, Z] ∈ E
      E:=E−{[c_z, Z]}
      IF  Z=X_j  THEN
          e:=e+c_z
          B_0:=B_0−{[c_z, Z]}
  IF  b_j=e  THEN
      e:=0, flag 2:=0
  ELSE
      e:=0, flag 2:=1
ELSE
    flag 2:=0
*s.t.2
E'=B_0
WHILE  E'≠∅  DO
  choose [c_z, Z] ∈ E'
  E':=E'−{[c_z, Z]}
  IF  Z=Y_0^{l−1} Y_i  THEN
      c:=c+c_z
      B_0:=B_0−{[c_z, Z]}
```

例4.2　$R=\mathbf{Q}[x, y, z]$ とする。

$R \ni f=x^6z^6-3x^5y^2z^5+3x^4y^4z^4-x^3y^6z^3+3x^5z^5$

$-9x^3y^4z^3+6x^2y^6z^2+15x^3y^2z^3-3x^2y^4z^2$
$-12xy^6z-5x^3z^3+24xy^4z+8y^6-3x^2z^2$
$-12xy^2z-12y^4$

に上記アルゴリズムを適用して，f が閉か否かを判定する。

Algorithm step 1　により，$x>y>z$ とする全次数順序において，$lp(g)=x^2z^2$, $l=3$ と求まる。(例4.1参照) また f の末尾のべき積 y^4 より g の末尾のべき積は $Y_m=y^4$ か $Y_m=y^2$ となる。ここでは $Y_m=y^2$ の場合を考える。

すなわち Algorithm step2 において $g=x^2z^2+c_1xy^3+\cdots+c_{23}y^2$ の係数 c_i $(1\leq i\leq 23)$ を求めればよい。このとき使用される f の項は $Y_0^2Y_{23}=(x^2z^2)^2y^2=x^4y^2z^4$ より $x^6z^6-3x^5y^2z^5+3x^4y^4z^4-x^3y^6z^3+3x^5z^5+0x^4y^2z^4$ までとなる。すべてのべき積を並べるならば，$X_0=x^6z^6,\cdots, X_6=x^5y^2z^5,\cdots,X_{13}=x^4y^4z^4,\cdots,X_{21}=x^3y^6z^3,\cdots, X_{162}=x^5z^5,\cdots, X_{167}=x^4y^2z^4$ となる。ここで … に存在するべき積の f における係数は 0 である。

Algorithm step2 において $i=1, j=1, m=23$ として 2 番目の WHILE *loop* に入る。

(1)　＊s.t.1において，$X_1=x^5y^7>Y_0^2Y_1=x^5y^3z^4$ より＊check へ行くが，$b_1=0$ より＊s.t.1 にもどり $j=2$ とする。

$i=1, j=4$ まで同様の繰り返しとなる。

(2)　$i=1, j=5$ のとき，＊s.t.1 において $X_5=x^5y^3z^4=Y_0^2Y_1$ より，$b=b_5=0$ とおく。＊s.t.2 において，$\mathbf{B}_0=\emptyset$ より $c=0$ である。よって $c_1=0$ となり $\mathbf{H}=\{[1, x^2z^2]\}$ に $[0, xy^3]$ が加えられる。$i=2$ として WHILE *loop* の最初にもどる。

(3)　＊s.t.1 において，$X_6=x^5y^2z^5=Y_0^2Y_2$ より $b=b_6=-3$ とおく。＊s.t.2 において，$\mathbf{B}_0=\emptyset$ より $c=0$ である。よって $c_2=-1$ となり $\mathbf{H}$ に $[-1, xy^2z]$ が加えられる。ここで $c_2\neq 0$ により $\mathbf{B}_0=\{[3, x^4y^4z^4], [-1, x^3y^6z^3]\}$, $i=3$ として WHILE *loop* の最初にもどる。

(4)　＊s.t.1 において，$X_7=x^5yz^6=Y_0^2Y_3$ より $b=b_7=0$とおく。＊s.t.2 において，$\mathbf{B}_0\neq\emptyset$ であるが，$Y_0^2Y_3$ と等しいべき積は存在しないので $c=0$ である。よって $c_3=0$ となり $\mathbf{H}$ に $[0, xyz^2]$ が加えられ，$i=4$ として WHILE *loop* の最初にもどる。

$i=4, j=8$ の場合は(4)のパターンとなり，$\mathbf{H}$ に $[0, xz^3]$ が加えられる。$i=5, j=12$ までは(1)のパターンとなる。

(5)　$i=5, j=13$ のとき，＊s.t.1 において $X_{13}=x^4y^4z^4=Y_0^2Y_5$ より，$b=b_{13}=3$ とおく。＊s.t.2 において $\mathbf{B}_0$ の中に $\{[3, x^4y^4z^4]\}$ があるので $c=3$ となる。よって $c_5=0$ となり $\mathbf{H}$ に $[0.y^4]$ が加えられる。$\mathbf{B}_0=\{[-1, x^3y^6z^3]\}$, $i=6$ として WHILE *loop* の最初にもどる。

以後 $i=9, j=17$ までは(4)のパターンとなり，$\mathbf{H}$ に $[0, y^3z],\cdots,[0, z^4]$ が加えられる。$i=10, j=20$ までは(1)のパターンとなる。

(6)　$i=10, j=21$ のとき＊s.t.1 において $X_{21}=x^3y^6z^3>Y_0^2Y_{10}=x^7z^4$ より＊check へ行く。$b_{21}=-1$ であり，$\mathbf{B}_0$ の中に $[-1, x^3y^6z^3]$ があるので $e=-1$ となる。$\mathbf{B}_0=\emptyset$ とし，$b_{21}=e$ なので *flag* $2=0$ として＊s.t.1 へもどり $j=22$ とする。

以後 $i=21, j=161$ までは(1)か(2)のパターンとなり，$\mathbf{H}$ に $[0, x^3],\cdots,[0, xy]$ が加えられる。$i=22, j=162$ のとき $[1, xz]$ が求まり，$i=23, j=167$ のとき $[2, y^2]$ が求まる。

以上より $g=x^2z^2-xy^2z+xz+2y^2$ が求まり，3．2 の Algorithm 3.2 を利用して f を g で割ることにより $f=g^3-3g^2$ となることが解る。

例4.2の補足

f が閉でない場合，$g=x^2z^2+c_1xy^3+c_2xy^2z+c_3xyz^2+c_4xz^3+c_5y^4$ によって $f=g^3+a_1g^2+a_2g$ となる可能性もあったが，(5)によって y^4 の係数は 0 となる。よってこのようなことは起こらない。

f の項 $-x^3y^6z^3$ を $-x^3y^7z^2$ に取り替えた多項式を f_1 とすると，このアルゴリズムにおいて f_1 は閉であることが判定される。なぜなら(6)において $X_{20}=x^3y^7z^2>Y_0^2Y_{10}=x^7z^4$ となり＊check に行く。$b_{20}=-1$ であるが，$\mathbf{B}_0$ の中にこのべき積は存在しないので $e=0$ となり $b_{20}\neq e$ である。よって *flag* $2=1$ となり $\mathbf{A}$ の中から新しい候補を選ぶことになるが，$\mathbf{A}=\emptyset$ であり，このアルゴリズムは f_1 is closed を出力してストップする。

5．あとがき

本論文において示されたアルゴリズムは，初等的な補題4.1，4.2により求められている。これは f が閉でない場合，f を g の多項式とみたとき，g が f の主要項 g^l の中だけで求められることによる。しかしながら n 変数多項式は，大半が閉であるにもかかわらず，このアルゴリズムでは g を計算し，最終的に f を g で割るまでその判定がつかないということも同時にこのこと

に起因している。

またこのことは，更に多項式環の係数体 k の標数にも関係する問題でもある。k の標数が $p\neq0$ であるとき，式(2)において $l\equiv0\,(mod\ \ p)$ となっている場合 g^l の展開式において，べき積 $Y_0^{l-1}Y_i$ の係数は 0 となる。したがって，この展開式の中に現れず，本論文で示したアルゴリズムでは Y_i の係数を求めることは不可能となる。係数体の標数が 0 でない場合に，同様のアルゴリズムを求めることは，今後の課題である。

最後になりましたが，この論文を書くにあたり，松村英之教授から多くの貴重な助言を頂きました。心より感謝します。

1995年 8 月 7 日，松村英之先生は日本アルプス常念岳を登山中事故に遭われ，帰らぬ人となられました。この論文は，昨年12月より松村先生と筆者らが行った 6 カ月間のゼミ内容をまとめたものです。わずか 6 カ月という短い期間ではありましたが，先生のご指導に深く感謝するとともに，心から先生のご冥福をお祈りいたします。

参 考 文 献

[1] A.Nowicki, M.Nagata: Rings of constants for k-derivations in $k[x_1,\cdots,x_n]$, J.Math.Kyoto Univ., Vol.28-1 (1988), 111-118.

[2] W.W.Adams, P.Loustaunau: An Introduction to Gröbner Bases, Amer.Math.Soc., (1994).

[3] P.Eakin: A note on finite dimensional subrings of polynomial rings, Proc.Amer.Math.Soc., Vol.31-1 (1972), 75-80.

[4] A.Zaks: Dedekind subrings of $k[x_1,\cdots,x_n]$ are rings of polynomials, Israel J.Math., Vol.9 (1971), 285-289.