グラフの1ー因子分解を利用した最適スケジューリングアルゴリズム

グラフの1-因子分解を利用した最適スケジューリングアルゴリズム

高　橋　昌　也（福岡工業短期大学ＯＡ情報システム学科）

Optimal Scheduling Algorithms by 1-factorizations of Graphs

Masaya TAKAHASHI (Department of Office Automation and Information Systems, Fukuoka Jr. College of Technology, Higashi-ku, Fukuoka 811-02, Japan.)

Abstract

The *scheduling problem of a round-robin pairing* is: Given some positive integer n and some restricted condition C, make a schedule of a round-robin pairing with *n* teams satisfying the condition C. If the problem is solved by human powers, we can find the following two troubles:

(1) If *n* is very large, it costs the author infinite labor.

(2) The fairness is not always secured.

In this paper, we consider several variations of the scheduling problem of a round-robin pairing, and, by using the 1-factorizations of complete graphs or complete directed graphs, we give optimal algorithms for solving the problem by using a computer.

Key words: *round-robin, home and away, scheduling, complete graph, 1-factorization, restricted conditions*

1．はじめに

昨年，サッカーの日本代表チームがホームアンドアウェイによる２回戦総当たりの厳しいリーグ戦を経て，ワールドカップ本大会への悲願の初出場を決めたのはまだ記憶に新しいところである。また，毎年春になると，プロ野球もホームアンドアウェイによる27回総当たりのリーグ戦が始まり，各チームとも優勝目指して激しい戦いを秋まで繰り広げるのである。

いずれの場合も，すばらしい熱戦を展開するための前提条件となるものは，公平で効率のよいリーグ戦日程である。ところが現状では，その日程のスケジューリングは人手によって行われている。

平成10年10月21日受付

人手による日程のスケジューリングには以下の２つの問題点が含まれる：

(1) 参加チームが多いと対戦カードが多くなり，最短期間で日程が終了するようなスケジューリングを行うのが大変になる。

(2) 公平性が必ずしも保障されない。

本論文の目的は，上記２点の問題を解決するために，公平で最短期間で終了するような日程のスケジューリングを行うアルゴリズムを，グラフ理論の問題として定式化することにより，構築することである。

チーム数が特定の値に限定されている１回戦総当たりのリーグ戦の場合は，表１-１のような結果になるアルゴリズムが得られている[1]。

例えば，A，B，C，D，E，F，G，Hの８チームの場合は表１-２のような日程が得られる。

本論文では，グラフの１-因子分解の考え方[2]を用い

表 1 - 1　従来の結果

チーム数 N	試合開催日数	チーム数 N	試合開催日数
2	1	9	9
3	3	10	9
4	3	11	11
5	5	12	11
6	5	16	15
7	7	2^n	2^n-1
8	7	n：任意の自然数	

表 1 - 2　8 チームによる例題

開催日	日程			
第 1 日	A—E	B—F	C—G	D—H
第 2 日	A—F	B—G	C—H	D—E
第 3 日	A—G	B—H	C—E	D—F
第 4 日	A—H	B—E	C—F	D—G
第 5 日	A—C	B—D	E—G	F—H
第 6 日	A—D	B—C	E—H	F—G
第 7 日	A—B	C—D	E—F	G—H

ることにより，以下のような最適アルゴリズムを提案する：

(1)　参加チーム数に関係なく，1 回戦総当たりのリーグ戦の日程のスケジューリングを行う。この場合は，完全グラフの 1 -因子分解の考え方を用いることができる。

(2)　様々な制約条件の下で，参加チーム数が奇数の正整数の場合のホームアンドアウェイによる 2 回戦総当たりのリーグ戦の日程のスケジューリングを行う。また，制約条件によっては，参加チーム数が偶数の正整数の場合でもスケジューリング可能である。これらの場合は，完全有向グラフの 1 -因子分解の考え方を用いることができる。

2．準　　備

問題を次の(1)〜(4)のように定式化する：

(1)　対戦は，「1 対 1」で行う。

(2)　対戦は，もれなく全チームと行う。

(3)　各チームは同じ日に 1 試合だけ行う。ただし，チーム数が奇数のときは，試合をしないチームが 1 つだけ存在してもかまわない。

(4)　上記(1)〜(3)の条件のもとで 1 回戦総当たりのリーグ戦を実施したとき，全日程を完了するための対戦日を最短で何日とり，対戦をどのようにスケジュールすればよいのだろうか？

問題をこのように定式化したとき，チームを点で表し，対戦を 2 点間を結ぶ線で表せば，上記問題はグラフ理論の問題として扱うことができる。このとき，チーム数を n とすると，リーグ戦は n 個の点をもつ**完全グラフ** (complete graph) $\boldsymbol{K_n}$ として表現できる。(図 2 - 1 参照) このとき，明らかに $n \geqq 2$ である。

ここで，2 点間を結ぶ線のことを**辺** (edge) という。

また，ある対戦日に着目したとき，n が偶数のときは，K_n のすべての点と，2 点を結ぶ辺が $n/2$ 組存在する。(図 2 - 2 参照) このとき，K_n のすべての点とこれらの組は K_n の部分グラフであり，この部分グラフのことを **1 -因子** (1-factor) という。

このように考えると，n が偶数のときは，上記問題は完全グラフ K_n を 1 -因子に分解する問題（**1 -因子分解** (1-factorization) という）に帰着できる。

実際に，n が偶数のときは，完全グラフ K_n は **1 -因**

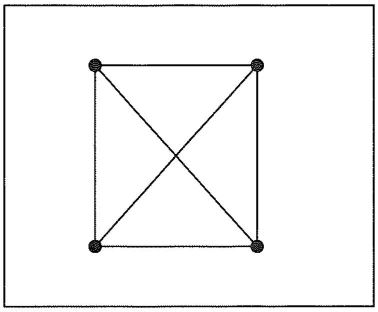

図 2 - 1　K_4 の例

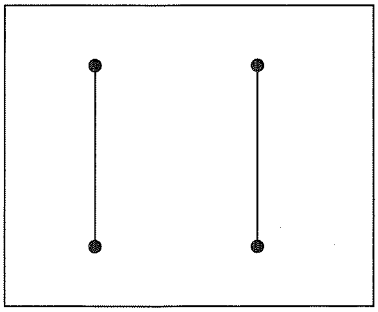

図 2 - 2　K_4 の 1 -因子の例

子分解可能(1-factorable) であり，以下のように構成的に証明されている[2]。

補題2．1[2]：すべての偶数の正整数nについて，完全グラフK_nは1-因子分解可能である。

証明：$n=2$のときは明らかである。よって$n \geqq 4$とする。K_nの点集合を$V(K_n)=\{v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{n-2}\}$とする。点$v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{n-2}$を正$n-1$角形上に配置して，$v_{-1}$を中心に置く。すべての点の間を直線で結ぶ。$j=0, 1, \cdots, n-2$について，$F_j$を$K_n$のすべての点と，直線である辺$\langle v_{-1}, v_j \rangle$及びそれに垂直なすべての直線である辺から成っている部分グラフと定義する。このとき，$F_0, F_1, \cdots, F_{n-2}$の和集合は$K_n$の辺集合と等しく，従って，$j=0, 1, \cdots, n-2$について，$F_j$は$K_n$の1-因子であり，$F_0, F_1, \cdots, F_{n-2}$は$K_n$の1-因子分解である。■

図2-3にK_6の例を示す。

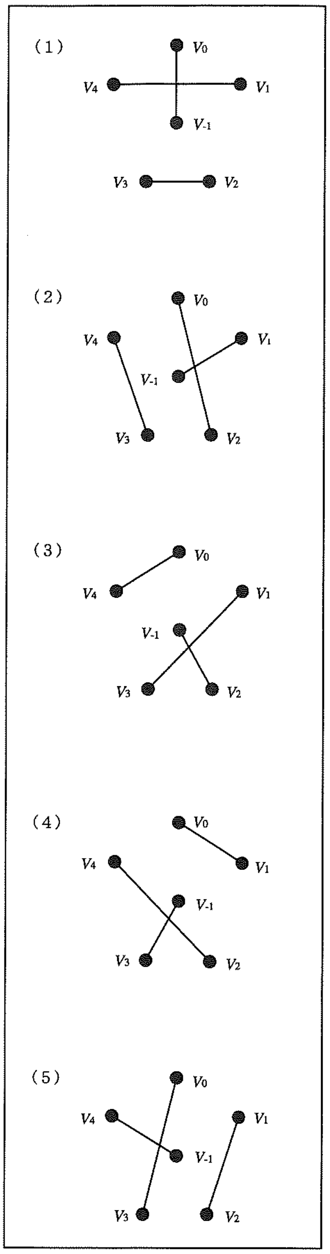

図2-3　K_6の1-因子分解の例

3．1回戦総当たりのリーグ戦

チーム数nが偶数の場合と奇数の場合に分けて考える。ここで，nは正整数とする。

偶数の場合は，完全グラフK_nでモデル化し，K_nの点集合を$V(K_n)=\{v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{n-2}\}$とする。また，任意の2点$v_j, v_q (j=-1, 0, 1, \cdots, n-2, q=-1, 0, 1, \cdots, n-2, j \neq q)$について，$v_j, v_q$を結ぶ辺を$\langle v_j, v_q \rangle$と表す。

nが奇数のときは，2チームずつ対戦したとき，必ず1チームが余ってくる。そこで，チーム数を$n+1$として1回戦総当たりのリーグ戦をスケジューリングし，その結果から関係のないチームとの対戦を取り除けばよい。この場合は，完全グラフK_{n+1}でモデル化し，K_{n+1}の点集合を$V(K_{n+1})=\{v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}\}$とし，$v_{-1}$をダミーとする。また，任意の2点$v_j, v_q (j=-1, 0, 1, \cdots, n-1, q=-1, 0, 1, \cdots, n-1, j \neq q)$について，$v_j, v_q$を結ぶ辺を$\langle v_j, v_q \rangle$と表す。

まず，nが偶数の場合であるが，補題2．1の構成的証明方法より，次のスケジューリングアルゴリズムを得る。

Algorithm RR-1.

Begin
　$t:=(n-2)/2;$
　for $j:=0$ **to** $n-2$ **do**
　begin
　　$F_j:=\{\langle v_{-1}, v_j \rangle\};$
　　for $h:=j+1$ **to** $j+t$ **do**
　　begin
　　　$p:=\mathrm{mod}(h, n-1);$
　　　{$\mathrm{mod}(h, n-1)$はhを$n-1$で割った余

```
            りを表す}
            q:=mod(2j+n−1−h, n−1);
            F_j:=F_j∪{⟨v_p, v_q⟩}
        end
    end
End.
```

アルゴリズム RR-1によって作られた辺集合 F_0, $F_1, \cdots, F_{n-2}$ の和集合は K_n の辺集合と等しく，従って，$j=0, 1, \cdots, n-2$ について，F_j は K_n の１-因子であり，$F_0, F_1, \cdots, F_{n-2}$ は K_n の１-因子分解である。よって，アルゴリズム RR-1は $O(n^2)$ 時間で，１回戦総当たりのリーグ戦を $n-1$ 日の日程でスケジューリングしていることになる。ここで，K_n は $n(n-1)/2$ 本の辺をもつので，どのようなアルゴリズムであれ，１回戦総当たりのリーグ戦をスケジューリングするには，最低 $O(n^2)$ 時間かかる。また，K_n の任意の点 $v_j(j=-1, 0, 1, \cdots, n-2)$ は他のすべての $n-1$ 個の点と辺で結ばれているので，どのようなアルゴリズムであれ，リーグ戦全体を完了させるには少なくとも $n-1$ 日必要である。

よって，アルゴリズム RR-1は最適スケジューリングアルゴリズムである。

n が奇数のときは，アルゴリズム RR-1と同様な，アルゴリズム RR-2を得る。

```
Algorithm RR-2.
Begin
  n:=n+1;
  t:=(n−2)/2;
  for j:=0 to n−2 do
    begin
      F_j:=φ; F'_j:={⟨v_{-1}, v_j⟩};
      for h:=j+1 to j+t do
        begin
          p:=mod(h, n−1);
          q:=mod(2j+n−1−h, n−1);
          F_j:=F_j∪{⟨v_p, v_q⟩};
          F'_j:=F'_j∪{⟨v_p, v_q⟩}
        end;
      n:=n−1;
    end
End.
```

アルゴリズム RR-2によって作られた辺集合 F'_0, $F'_1, \cdots, F'_{n-1}$ の和集合は K_{n+1} の辺集合と等しく，従って，$j=0, 1, \cdots, n-1$ について，F'_j は K_{n+1} の１-因子であり，$F'_0, F'_1, \cdots, F'_{n-1}$ は K_{n+1} の１-因子分解である。よって，$j=0, 1, \cdots, n-1$ について，アルゴリズムRR-2によって作られた辺集合 F_j は第 $j+1$ 日目のスケジュールとなるので，アルゴリズム RR-1と同様の理由により，アルゴリズム RR-2は $O(n^2)$ 時間で，１回戦総当たりのリーグ戦を n 日の日程でスケジューリングしている最適スケジューリングアルゴリズムである。

表３-１に７チームによるスケジューリングの例を示す。

以上より，次の定理が得られる。

定理１：すべての正整数 n について，n チームによる１回戦総当たりのリーグ戦の日程をスケジューリングする以下のような最適スケジューリングアルゴリズムが得られた。

(1)　n が偶数のときは日程が $n-1$ 日となり，n が奇数のときは日程が n 日となる。

(2)　$O(n^2)$ 時間でスケジュールを構成できる。

４．ホームアンドアウェイによる２回戦総当たりのリーグ戦

問題を次の(1)〜(4)のように定式化する：

(1)　対戦は，「１対１」で行う。

(2)　対戦は，もれなく全チームと「ホームアンドアウェイ方式」で行う。

(3)　各チームは同じ日に１試合だけ行う。ただし，チーム数が奇数のときは，試合をしないチームが１つだけ存在してもかまわない。

(4)　上記(1)〜(3)の条件のもとで２回戦総当たりのリーグ戦を実施したとき，全日程を完了するための対戦

表３-１　７チームによる例題

開催日	日	程	
第１日	v_1-v_6	v_2-v_5	v_3-v_4
第２日	v_2-v_0	v_3-v_6	v_4-v_5
第３日	v_3-v_1	v_4-v_0	v_5-v_6
第４日	v_4-v_2	v_5-v_1	v_6-v_0
第５日	v_5-v_3	v_6-v_2	v_0-v_1
第６日	v_6-v_4	v_0-v_3	v_1-v_2
第７日	v_0-v_5	v_1-v_4	v_2-v_3

日を最短で何日とり，対戦をどのようにスケジュールすればよいのだろうか？

問題をこのように定式化したとき，チームを点で表し，対戦を一方の点から他方の点へ結ぶ矢印で表し，矢印が出る方のチームが「ホーム」，矢印が入る方のチームを「アウェイ」とすれば，上記問題もグラフ理論の問題として扱うことができる。このとき，チーム数をnとすると，リーグ戦はn個の点をもつ**完全有向グラフ**（complete directed graph）K'_nとして表現できる。このとき，明らかに$n \geqq 2$である。

ここで，一方の点から他方の点へ結ぶ矢印のことを**有向辺**（directed edge）という。また，有向辺が出る点のことを**出点**（tail）といい，有向辺が入る点のことを**入点**（head）という。

また，ある対戦日に着目したとき，nが偶数のときは，K'_nのすべての点と，一方の点から他方の点へ結ぶ有向辺が$n/2$組存在する。このとき，K'_nのすべての点とこれらの組はK'_nの部分グラフであり，この部分グラフのことも**1-因子**ということにする。

このように考えると，nが偶数のときは，上記問題は完全有向グラフK'_nを1-因子に分解する問題（**有向グラフの1-因子分解**（1-factorization of directed graphs）ということにする）に帰着できる。

この問題も前章と同様に，チーム数nが偶数の場合と奇数の場合に分けて考える。ここで，nは正整数とする。

偶数の場合は，完全有向グラフK'_nでモデル化し，K'_nの点集合を$V(K'_n)=\{v_{-1}, v_0, v_1, \cdots, v_{n-2}\}$とする。また，任意の2点$v_j, v_q (j=-1, 0, 1, \cdots, n-2, q=-1, 0, 1, \cdots, n-2, j \neq q)$について，$v_j$から$v_q$へ出ている有向辺を$(v_j, v_q)$と表し，逆向きの有向辺を$(v_q, v_j)$と表す。

nが奇数のときは，チーム数を$n+1$としてホームアンドアウェイにより2回戦総当たりのリーグ戦をスケジューリングし，その結果から関係のないチームとの対戦を取り除けばよい。この場合は，完全有向グラフK'_{n+1}でモデル化し，K'_{n+1}の点集合を$V(K'_{n+1})=\{v_{-1}, v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}\}$とし$v_{-1}$をダミーとする。また，任意の2点$v_j, v_q (j=-1, 0, 1, \cdots, n-1, q=-1, 0, 1, \cdots, n-1, j \neq q)$について，$v_j$から$v_q$へ出ている有向辺を$(v_j, v_q)$と表し，逆向きの有向辺を$(v_q, v_j)$と表す。

4．1　制約条件のない場合

まず，ホームアンドアウェイによる2回戦総当たり戦の最適スケジュールにさえなっていればよい場合を考える。

4．1．1　nが偶数の場合

最も簡単な方法（「方法Ｉ」と名付ける）は，前章のアルゴリズムRR-1を以下の方法で2回使用するというものである：

(1)　1回目：1-因子$F_0, F_1, \cdots, F_{n-2}$を求め，各1-因子$F_j (j=0, 1, \cdots, n-2)$の辺に，添字の小さい方の点から大きい方の点へ方向を付けて有向辺とし，この有向辺集合をH_jとする。

(2)　2回目：有向辺集合$H_{j+n-1} (j=0, 1, \cdots, n-2)$の有向辺の方向を$H_j$の有向辺の方向と逆にする。例えば，$v_1$と$v_3$については，1回目は$(v_1, v_3)$，2回目は$(v_3, v_1)$とするのである。

このようにして作られた有向辺集合$H_0, H_1, \cdots, H_{2n-3}$の和集合は完全有向グラフ$K'_n$の有向辺集合と等しく，従って，$j=0, 1, \cdots, 2n-3$について，$H_j$は$K'_n$の1-因子であり，$H_0, H_1, \cdots, H_{2n-3}$は$K'_n$の1-因子分解である。

別の方法（「方法II」と名付ける）としては，前章のアルゴリズムRR-1を以下のように2回使用するというものである：

(1)　1回目：1-因子$F_0, F_1, \cdots, F_{n-2}$を求め，各1-因子$F_j (j=0, 1, \cdots, n-2)$について，$v_{-1}$に関係する辺$\langle v_{-1}, v_j \rangle$を有向辺$(v_{-1}, v_j) \in H_j$とし，そうでない辺$\langle v_p, v_q \rangle$を有向辺$(v_p, v_q) \in H_j$とする。

(2)　2回目：1-因子$F_0, F_1, \cdots, F_{n-2}$を求め，各1-因子$F_j (j=0, 1, \cdots, n-2)$について，$v_{-1}$に関係する辺$\langle v_{-1}, v_j \rangle$を有向辺$(v_j, v_{-1}) \in H_{j+n-1}$とし，そうでない辺$\langle v_p, v_q \rangle$を有向辺$(v_q, v_p) \in H_{j+n-1}$とする。

ただし，p, qはアルゴリズムRR-1で使用した変数であり，$p=0, 1, 2, \cdots, n-2, q=0, 1, 2, \cdots, n-2, p \neq q \neq j (j=0, 1, \cdots, n-2)$である。

このようにして作られた有向辺集合$H_0, H_1, \cdots, H_{2n-3}$の和集合は完全有向グラフ$K'_n$の有向辺集合と等しく，従って，$j=0, 1, \cdots, 2n-3$について，$H_j$は$K'_n$の1-因子であり，$H_0, H_1, \cdots, H_{2n-3}$は$K'_n$の1-因子分解である。

いずれの場合も，$j=0, 1, \cdots, 2n-3$について，有向辺集合H_jは第$j+1$日目のスケジュールとなる。

4．1．2　nが奇数の場合

最も簡単な方法（「方法Ｉ'」と名付ける）は，前章の

アルゴリズム RR-2を以下の方法で２回使用するというものである：

(1)　１回目：１-因子 $F'_0, F'_1, \cdots, F'_{n-1}$ とそれぞれに対応する有向辺集合 $F_0, F_1, \cdots, F_{n-1}$ を求め，各１-因子 F'_j の辺と有向辺集合 $F_j(j=0, 1, \cdots, n-1)$ の辺に，添字の小さい方の点から大きい方の点へ方向を付けて有向辺とし，この有向辺集合をそれぞれ H'_j, H_j とする。

(2)　２回目：有向辺集合 H'_{n+j} と $H_{n+j}(j=0, 1, \cdots, n-1)$ の有向辺の方向を H'_j と H_j の有向辺の方向と逆にする。

このようにして作られた有向辺集合 $H'_0, H'_1, \cdots, H'_{2n-3}$ の和集合は完全有向グラフ K'_{n+1} の有向辺集合と等しく，従って，$j=0, 1, \cdots, 2n-1$ について，H'_j は K'_{n+1} の１-因子であり，$H'_0, H'_1, \cdots, H'_{2n-1}$ は K'_{n+1} の１-因子分解である。

別の方法（「方法II′」と名付ける）としては，前章のアルゴリズム RR-2を以下のように２回使用するというものである：

(1)　１回目：１-因子 $F'_0, F'_1, \cdots, F'_{n-1}$ とそれぞれに対応する有向辺集合 $F_0, F_1, \cdots, F_{n-1}$ を求め，各１-因子 F'_j と有向辺集合 $F_j(j=0, 1, \cdots, n-1)$ について，v_{-1} に関係する辺 $\langle v_{-1}, v_j\rangle$ を有向辺 $(v_{-1}, v_j)\in H_j$ とし，そうでない辺 $\langle v_p, v_q\rangle$ を有向辺 $(v_p, v_q)\in H_j$ とする。

(2)　２回目：１-因子 $F'_0, F'_1, \cdots, F'_{n-1}$ とそれぞれに対応する有向辺集合 $F_0, F_1, \cdots, F_{n-1}$ を求め，各１-因子 F'_j と有向辺集合 $F_j(j=0, 1, \cdots, n-1)$ について，v_{-1} に関係する辺 $\langle v_{-1}, v_j\rangle$ を有向辺 $(v_j, v_{-1})\in H_{j+n-1}$ とし，そうでない辺 $\langle v_p, v_q\rangle$ を有向辺 $(v_q, v_p)\in H_{j+n-1}$ とする。

ただし，p, q はアルゴリズム RR-2で使用した変数であり，$p=0, 1, 2, \cdots, n-1$, $q=0, 1, 2, \cdots, n-1$, $p\neq q\neq j(j=0, 1, \cdots, n-1)$ である。

このようにして作られた有向辺集合 $H'_0, H'_1, \cdots, H'_{2n-1}$ の和集合は完全有向グラフ K'_{n+1} の有向辺集合と等しく，従って，$j=0, 1, \cdots, 2n-1$ について，H'_j は K'_{n+1} の１-因子であり，$H'_0, H'_1, \cdots, H'_{2n-1}$ は K'_{n+1} の１-因子分解である。

よって，$j=0, 1, \cdots, 2n-1$ について，上記の「方法Ｉ′」または「方法II′」によって作られた有向辺集合 H_j は第 $j+1$ 日目のスケジュールとなる。

４．１．３　まとめ

いずれにしても，制約条件がなければ，簡単に最適なスケジュールを得ることができる。

よって，次の定理が得られる。

定理２：すべての正の整数 n について，制約条件なしに，n チームのホームアンドアウェイによる２回戦総当たりのリーグ戦の日程をスケジューリングする以下のような最適スケジューリングアルゴリズムが得られた。

(1)　n が偶数のときは日程が $2(n-1)$ 日となり，n が奇数のときは日程が $2n$ 日となる。

(2)　$O(n^2)$ 時間でスケジュールを構成できる。

４．２　制約条件がある場合—その１

しかし，前節の方法だと，チームによってホームとアウェイの日程の消化にバラツキが出てくる。例えば，n が偶数の場合，「方法Ｉ」を使ったスケジューリングでは，チーム v_{-1}, v_{n-2} について以下のような現象が起こる：

(1)　v_{-1} は１回目（１巡目）は１とおりの対戦をすべてホームで行い，２回目（２巡目）は逆にすべてアウェイで行う。

(2)　同様に，v_{n-2} はその逆となる。

そこで，以下のような制約条件を設け日程をスケジューリングする：

> 制約条件１
>
> どのチームも j 試合 $(j=0, 1, 2, \cdots, 2n-2)$ 消化した時点で，ホームとアウェイの試合消化数の差が高々１である。

日程の公平性を考えても，このような制約条件を設ける方がベターであろう。

n が偶数の場合の最も簡単な方法（「方法III」と名付ける）は，前章のアルゴリズム RR-1を，以下のように改良したものである：

(1)　１-因子 $F_0, F_1, \cdots, F_{n-2}$ を求める。

(2)　各１-因子 $F_j(j=0, 1, \cdots, n-2)$ の各辺に，添字の小さい方の点から大きい方の点へ方向を付けて有向辺とする。この有向辺集合を H_{2j} とする。

(3)　各１-因子 $F_j(j=0, 1, \cdots, n-2)$ の各辺に，添字の大きい方の点から小さい方の点へ方向を付けて有向辺とする。この有向辺集合を H_{2j+1} とする。

このようにして作られた有向辺集合 $H_0, H_1, \cdots, H_{2n-3}$ の和集合は完全有向グラフ K'_n の有向辺集合と等しく，従って，$j=0, 1, \cdots, 2n-3$ について，H_j は K'_n の１-因子であり，$H_0, H_1, \cdots, H_{2n-3}$ は K'_n の１-因子分

解である。

よって，$j=0,1,\cdots,2n-3$ について，上記の「方法III」によって作られた有向辺集合 H_j は第 $j+1$ 日目のスケジュールとなる。

n が奇数の場合の最も簡単な方法（「方法III′」と名付ける）は，前章のアルゴリズム RR-2を，以下のように改良したものである：

(1)　1-因子 $F'_0, F'_1, \cdots, F'_{n-1}$ とそれぞれに対応する有向辺集合 $F_0, F_1, \cdots, F_{n-1}$ を求める。

(2)　各1-因子 F'_j とそれに対応する有向辺集合 F_j の各辺に，添字の小さい方の点から大きい方の点へ方向を付けて有向辺とする。これらの有向辺集合について，F'_j に対応する方を H'_{2j} とし，F_j に対応する方を H_{2j} とする。

(3)　各1-因子 F'_j とそれに対応する有向辺集合 F_j の各辺に，添字の大きい方の点から小さい方の点へ方向を付けて有向辺とする。これらの有向辺集合について，F'_j に対応する方向 H'_{2j+1} とし，F_j に対応する方を H_{2j+1} とする。

このようにして作られた有向辺集合 $H'_0, H'_1, \cdots, H'_{2n-1}$ の和集合は完全有向グラフ K'_{n+1} の有向辺集合と等しく，従って，$j=0,1,\cdots,2n-1$ について，H'_j は K'_{n+1} の1-因子であり，$H'_0, H'_1, \cdots, H'_{2n-1}$ は K'_{n+1} の1-因子分解である。

よって，$j=0,1,\cdots,2n-1$ について，上記の「方法III′」によって作られた有向辺集合 H_j は第 $j+1$ 日目のスケジュールとなる。

いずれにしても，「制約条件1」のもとでは，簡単に最適なスケジュールを得ることができる。

よって，次の定理が得られる。

定理3：すべての正整数 n について，「制約条件1」のもとで，n チームのホームアンドアウェイによる2回戦総当たりのリーグ戦の日程をスケジューリングする以下のような最適スケジューリングアルゴリズムが得られた。

(1)　n が偶数のときは日程が $2(n-1)$ 日となり，n が奇数のときは日程が $2n$ 日となる。

(2)　$O(n^2)$ 時間でスケジュールを構成できる。

4．3　制約条件がある場合—その2

しかし，同じチームが続けて対戦するというのも，そのときのコンディションなどによっては，一方が一気に2勝0敗となることが考えられ，その積み重ねが優勝争いに大きく影響することもあり得る。

そこで，以下のような制約条件を設け日程をスケジューリングする：

> 制約条件2
>
> (1)　どのチームも j 試合 $(j=0,1,2,\cdots,2n-2)$ 消化した時点で，ホームとアウェイの試合消化数の差が高々1である。
>
> (2)　同じチーム同志で続けて対戦しない。

以下では，そのようなアルゴリズムについて考える。

4．3．1　n が奇数の場合

アルゴリズム RR-2を改良した次のスケジューリングアルゴリズムを得る。

```
Algorithm RRHA-1.
Begin
  n:=n+1;
  t:=(n-2)/2;
  for i:=0 to 1 do
    begin
      for b:=0 to n-2 do
        begin
          x:=0; j:=(n-1)i+b; F_j:=φ;
          if i=0 then F'_j:={(v_{-1}, v_b)}
                 else F'_j:={(v_b, v_{-1})};
          for h:=b+1 to b+t do
            begin
              p:=mod(h, n-1);
              q:=mod(2b+n-1-h, n-1);
              if i+x is even then
                begin
                  F_j:=F_j∪{(v_q, v_p)};
                  F'_j:=F'_j∪{(v_q, v_p)};
                end
              else
                begin
                  F_j:=F_j∪{(v_p, v_q)};
                  F'_j:=F'_j∪{(v_p, v_q)};
                end
              x:=x+1
            end
        end
    end;
```

$n := n-1$
End.

ここで，アルゴリズム **RRHA**-1で使用した変数 i について，$i=0$ のときは有向辺集合 $F_0, F_1, \cdots, F_{n-1}$ と $F'_0, F'_1, \cdots, F'_{n-1}$ を作成し，$i=1$ のときは有向辺集合 $F_n, F_{n+1}, \cdots, F_{2n-1}$ と $F'_n, F'_{n+1}, \cdots, F'_{2n-1}$ を作成する。また，$j=0,1,\cdots,n-1$ について，F_{n+j} の有向辺の方向は，F_j の有向辺の方向とすべて逆になっており，F'_{n+j} の有向辺の方向は F'_j の有向辺の方向とすべて逆になっている。

$j=0,1,\cdots,2n-1$ について，$A_j=F_0 \cup F_1 \cup \cdots \cup F_j$ とする。また，$b=0,1,\cdots,n-1$ について，$\alpha_b(j)$ を点 v_b を出点としている A_j の有向辺の数とし，$\beta_b(j)$ を点 v_b を入点としている A_j の有向辺の数とする。

このとき，以下の補題が成り立つ。

補題4．1：アルゴリズム **RRHA**-1によってスケジューリングされた n チームのホームアンドアウェイによる2回戦総当たりの日程は，「制約条件2」を充たす。

証明：アルゴリズム **RRHA**-1によって作られた有向辺集合 $F'_0, F'_1, \cdots, F'_{2n-1}$ の和集合は完全有向グラフ K'_{n+1} の有向辺集合と等しく，従って，$j=0,1,\cdots,2n-1$ について，F'_j は K'_{n+1} の1-因子であり，$F'_0, F'_1, \cdots, F'_{2n-1}$ は K'_{n+1} の1-因子分解である。よって，$j=0,1,\cdots,2n-1$ について，アルゴリズム **RRHA**-1によって作られた有向辺集合 F_j は第 $j+1$ 日目のスケジュールとなる。

また，$j=0,1,\cdots,n-1$ について，F_{n+j} の有向辺の方向は F_j の有向辺の方向とすべて逆になっている。

以降，「制約条件2」が満足されていることを示す。

点 $v_b(b=0,1,\cdots,n-1)$ は F_b と F_{n+b} の有向辺の出点にも入点にもなっていない。また，$b=0,1,\cdots,n-1$ について，次の2つの場合に分けて考える：

(1)　b が偶数のときは，v_b は有向辺集合 $F_0, F_2, F_4, \cdots, F_{b-2}$ と $F_{b+1}, F_{b+3}, F_{b+5}, \cdots, F_{n-2}$ と $F_{n+1}, F_{n+3}, F_{n+5}, \cdots, F_{n-b-1}$ と $F_{n+b+2}, F_{n+b+4}, F_{n+b+6}, \cdots, F_{2n-1}$ の有向辺の出点となり，$F_1, F_3, F_5, \cdots, F_{b-1}$ と $F_{b+2}, F_{b+4}, F_{b+6}, \cdots, F_{n-1}$ と $F_n, F_{n+2}, F_{n+4}, \cdots, F_{n+b-2}$ と $F_{n+b+1}, F_{n+b+3}, F_{n+b+5}, \cdots, F_{2n-2}$ の有向辺の入点となる。

(2)　b が奇数のときは，v_b は有向辺集合 $F_1, F_3, F_5, \cdots, F_{b-2}$ と $F_{b+1}, F_{b+3}, F_{b+5}, \cdots, F_{n-1}$ と $F_n, F_{n+2}, F_{n+4}, \cdots, F_{n+b-1}$ と $F_{n+b+2}, F_{n+b+4}, F_{n+b+6}, \cdots, F_{2n-2}$ の有向辺の出点となり，$F_0, F_2, F_4, \cdots, F_{b-1}$ と $F_{b+2}, F_{b+4}, F_{b+6}, \cdots, F_{n-2}$ と $F_{n+1}, F_{n+3}, F_{n+5}, \cdots, F_{n+b-2}$ と $F_{n+b+1}, F_{n+b+3}, F_{n+b+5}, \cdots, F_{2n-1}$ の有向辺の入点となる。

以上より，$j=0,1,\cdots,2n-1$ について，$|\alpha_b(j)-\beta_b(j)| \leq 1$ が必ず成り立つ。ここで，$F_j(j=0,1,\cdots,2n-1)$ は第 $j+1$ 日目のスケジュールであるので，どのチームも j 試合 $(j=0,1,\cdots,2n-2)$ 消化した時点で，ホームとアウェイの試合消化数の差は高々1であることになる。

また，任意の2点 $v_p, v_q(p=0,1,\cdots,n-1, q=0,1,\cdots,n-1, p \neq q)$ について，有向辺 (v_p, v_q) がある有向辺集合 $F_j(j=0,1,\cdots,n-1)$ に存在している（F_{n+j} に存在している）とすると，有向辺 (v_q, v_p) は F_{n+j} に存在する（F_j に存在する）ことになる。$n \geq 3$ なので，このことは，同じチーム同志で続けて対戦しないことを意味する。

よって，「制約条件2」は充たされている。　■

アルゴリズム **RRHA**-1は $O(n^2)$ 時間で，ホームアンドアウェイによる2回戦総当たりのリーグ戦を $2n$ 日の日程でスケジューリングしている。ここで，K'_n は $n(n-1)$ 本の有向辺をもつので，どのようなアルゴリズムであれ，ホームアンドアウェイによる2回戦総当たりのリーグ戦をスケジューリングするには，最低 $O(n^2)$ 時間かかる。また，$K'_{n+1}-\{v_{-1}\}$ の任意の点 $v_j(j=0,1,2,\cdots,n-1)$ は他のすべての $n-1$ 個の点と有向辺で結ばれているので，どのようなアルゴリズムであれ，リーグ戦全体を完了させるには少なくとも $2n$ 日必要である。

よって，アルゴリズム **RRHA**-1は最適スケジューリングアルゴリズムである。

よって，次の定理が得られる。

定理4：すべての正の整数 n について，n が奇数のとき，「制約条件2」のもとで，n チームのホームアンドアウェイによる $2n$ 日の2回戦総当たりのリーグ戦の日程を $O(n^2)$ 時間でスケジューリングする最適スケジューリングアルゴリズムが得られる。

4．3．2　nが偶数の場合

この場合，n がどんな値であっても「制約条件2」を充たすように日程をスケジューリングできるとは限らない。例えば，$n=2$ のときは，明らかに不可能である。また，以下の補題に示すように，$n=4$ のときも不可能である。

$j=0,1,\cdots,2n-3$ について，F_j を完全有向グラフ K'_n の1-因子またはその候補である有向辺集合とし，$A_j=F_0\cup F_1\cup\cdots\cup F_j$ とする。また，$b=-1,0,1,\cdots,n-2$ について，$\alpha_b(j)$ を点 v_b を出点としている A_j の有向辺の数とし，$\beta_b(j)$ を点 v_b を入点としている A_j の有向辺の数とする。

補題4．2：$n=4$ のとき，「制約条件2」を充たすような4チームによるホームアンドアウェイによる2回戦総当たりの日程をスケジューリングすることは不可能である。

証明：有向辺集合 F_0 を $F_0=\{(v_{-1},v_1),(v_0,v_2)\}$ としても一般性は失われない。このとき，「制約条件2」を充たすためには，有向辺集合 F_1 として $F_1=\{(v_1,v_0),(v_2,v_{-1})\}$ とする以外に有り得ない。このとき，$b=-1,0,1,2,$ について，$\alpha_b(1)=\beta_b(1)=1$ となる。

「制約条件2」を充たすような有向辺集合 F_2 として，$F_2=\{(v_{-1},v_0),(v_1,v_2)\}$, $F_2=\{(v_{-1},v_0),(v_2,v_1)\}$, $F_2=\{(v_0,v_{-1}),(v_1,v_2)\}$, $F_2=\{(v_0,v_{-1}),(v_2,v_1)\}$, $F_2=\{(v_1,v_{-1}),(v_2,v_0)\}$ の5つのケースが考えられる。

このとき，「制約条件2」を充たすためには，有向辺集合 F_3,F_4,F_5 は以下のようになる：

ケース1：F_2 として $F_2=\{(v_{-1},v_0),(v_1,v_2)\}$ としたとき，F_3 の出点となる点は v_0,v_2 しかない。このとき，$(v_0,v_{-1}),(v_2,v_1)\in F_3$ はできないので，$F_3=\{(v_0,v_1),(v_2,v_{-1})\}$ とせねばならない。しかし，$(v_2,v_{-1})\in F_1$ である。このことは，このケースでは「制約条件2」を充たすような日程をスケジューリングすることは不可能であることを意味する。

ケース2：F_2 として $F_2=\{(v_{-1},v_0),(v_2,v_1)\}$ としたとき，F_3 の出点となる点は v_0,v_1 しかない。このとき，$(v_0,v_{-1}),(v_1,v_2)\in F_3$ はできないので，$F_3=\{(v_1,v_{-1}),(v_0,v_2)\}$ とせねばならない。しかし，$(v_0,v_2)\in F_0$ である。このことは，このケースでは「制約条件2」を充たすような日程をスケジューリングすることは不可能であることを意味する。

ケース3：F_2 として $F_2=\{(v_0,v_{-1}),(v_1,v_2)\}$ としたとき，F_3 の出点となる点は v_{-1},v_2 しかない。このとき，$(v_{-1},v_0),(v_2,v_1)\in F_3$ はできないので，$F_3=\{(v_{-1},v_1),(v_2,v_0)\}$ とせねばならない。しかし，$(v_{-1},v_1)\in F_0$ である。このことは，このケースでは「制約条件2」を充たすような日程をスケジューリングすることは不可能であることを意味する。

ケース4：F_2 として $F_2=\{(v_0,v_{-1}),(v_2,v_1)\}$ としたとき，F_3 の出点となる点は v_{-1},v_1 しかない。このとき，$(v_{-1},v_0),(v_1,v_2)\in F_3$ はできないので，$F_3=\{(v_{-1},v_2),(v_1,v_0)\}$ とせねばならない。しかし，$(v_1,v_0)\in F_1$ である。このことは，このケースでは「制約条件2」を充たすような日程をスケジューリングすることは不可能であることを意味する。

ケース5：F_2 として $F_2=\{(v_1,v_{-1}),(v_2,v_0)\}$ としたとき，F_3 の出点となる点は v_{-1},v_0 しかない。このとき，$(v_{-1},v_1),(v_0,v_2)\in F_3$ はできないので，$F_3=\{(v_{-1},v_2),(v_0,v_1)\}$ とせねばならない。このとき，$b=-1,0,1,2$ について，$\alpha_b(3)=\beta_b(3)=2$ となる。しかし，この段階で K'_4 の有向辺で A_3 に含まれていない有向辺は $(v_{-1},v_0),(v_0,v_{-1}),(v_1,v_2),(v_2,v_1)$ となり，それらを以後どのように有向辺集合 F_4,F_5 に2本ずつ振り分けても，F_5 の有向辺の方向はすべて F_4 の有向辺の方向の逆になる。このことは，第5日目と最終日である第6日目は同じチーム同志が続けて対戦することを意味するので，このケースも「制約条件2」を充たすような日程をスケジューリングすることは不可能であることを意味する。

以上の議論より，$n=4$ のときは，「制約条件2」を充たすような4チームによるホームアンドアウェイによる2回戦総当たりの日程をスケジューリングすることは不可能である。　■

$k\geqq3$ であるような整数 k について，$n=2^k$ のとき，以下のアルゴリズムを得る。

表4-1　16チームによる例題(1)

開催日	日程			
第1日	v_{-1} — v_0	v_1 — v_2	v_3 — v_4	v_5 — v_6
	v_7 — v_8	v_9 — v_{10}	v_{11} — v_{12}	v_{13} — v_{14}
第2日	v_2 — v_{-1}	v_0 — v_1	v_6 — v_3	v_4 — v_5
	v_{10} — v_7	v_8 — v_9	v_{14} — v_{11}	v_{12} — v_{13}
第3日	v_{-1} — v_1	v_0 — v_2	v_5 — v_3	v_4 — v_6
	v_7 — v_9	v_8 — v_{10}	v_{13} — v_{11}	v_{12} — v_{14}
第4日	v_6 — v_{-1}	v_3 — v_0	v_1 — v_4	v_2 — v_5
	v_{14} — v_7	v_{11} — v_8	v_9 — v_{12}	v_{10} — v_{13}
第5日	v_{-1} — v_5	v_0 — v_6	v_1 — v_3	v_2 — v_4
	v_7 — v_{13}	v_8 — v_{14}	v_9 — v_{11}	v_{10} — v_{12}
第6日	v_4 — v_{-1}	v_5 — v_0	v_6 — v_1	v_3 — v_2
	v_{12} — v_7	v_{13} — v_8	v_{14} — v_9	v_{11} — v_{10}

表 4 - 1　16チームによる例題(2)

開催日	日程			
第7日	v_{-1} — v_3	v_0 — v_4	v_1 — v_5	v_2 — v_6
	v_{11} — v_7	v_{12} — v_8	v_{13} — v_9	v_{10} — v_{14}
第8日	v_{14} — v_{-1}	v_7 — v_0	v_8 — v_1	v_9 — v_2
	v_3 — v_{10}	v_4 — v_{11}	v_5 — v_{12}	v_6 — v_{13}
第9日	v_{-1} — v_{13}	v_0 — v_{14}	v_1 — v_7	v_2 — v_8
	v_3 — v_9	v_4 — v_{10}	v_5 — v_{11}	v_6 — v_{12}
第10日	v_{12} — v_{-1}	v_{13} — v_0	v_{14} — v_1	v_7 — v_2
	v_8 — v_3	v_9 — v_4	v_{10} — v_5	v_{11} — v_6
第11日	v_{-1} — v_{11}	v_0 — v_{12}	v_1 — v_{13}	v_2 — v_{14}
	v_3 — v_7	v_4 — v_8	v_5 — v_9	v_6 — v_{10}
第12日	v_{10} — v_{-1}	v_{11} — v_0	v_{12} — v_1	v_{13} — v_2
	v_{14} — v_3	v_7 — v_4	v_8 — v_5	v_9 — v_6

表 4 - 1　16チームによる例題(3)

開催日	日程			
第13日	v_{-1} — v_9	v_0 — v_{10}	v_1 — v_{11}	v_2 — v_{12}
	v_3 — v_{13}	v_4 — v_{14}	v_5 — v_7	v_6 — v_8
第14日	v_8 — v_{-1}	v_9 — v_0	v_{10} — v_1	v_{11} — v_2
	v_{12} — v_3	v_{13} — v_4	v_{14} — v_5	v_7 — v_6
第15日	v_{-1} — v_7	v_0 — v_8	v_1 — v_9	v_2 — v_{10}
	v_3 — v_{11}	v_4 — v_{12}	v_5 — v_{13}	v_6 — v_{14}
第16日	v_{13} — v_{-1}	v_{14} — v_0	v_7 — v_1	v_8 — v_2
	v_9 — v_3	v_{10} — v_4	v_{11} — v_5	v_{12} — v_6
第17日	v_0 — v_{-1}	v_2 — v_1	v_4 — v_3	v_6 — v_5
	v_8 — v_7	v_{10} — v_9	v_{12} — v_{11}	v_{14} — v_{13}
第18日	v_{-1} — v_2	v_1 — v_0	v_3 — v_6	v_5 — v_4
	v_7 — v_{10}	v_9 — v_8	v_{11} — v_{14}	v_{13} — v_{12}

表 4 - 1　16チームによる例題(4)

開催日	日程			
第19日	v_1 — v_{-1}	v_2 — v_0	v_3 — v_5	v_6 — v_4
	v_9 — v_7	v_{10} — v_8	v_{11} — v_{13}	v_{14} — v_{12}
第20日	v_{-1} — v_6	v_0 — v_3	v_4 — v_1	v_5 — v_2
	v_7 — v_{14}	v_8 — v_{11}	v_{12} — v_9	v_{13} — v_{10}
第21日	v_5 — v_{-1}	v_6 — v_0	v_3 — v_1	v_4 — v_2
	v_{13} — v_7	v_{14} — v_8	v_{11} — v_9	v_{12} — v_{10}
第22日	v_{-1} — v_4	v_0 — v_5	v_1 — v_6	v_2 — v_3
	v_7 — v_{12}	v_8 — v_{13}	v_9 — v_{14}	v_{10} — v_{11}
第23日	v_3 — v_{-1}	v_4 — v_0	v_5 — v_1	v_6 — v_2
	v_7 — v_{11}	v_8 — v_{12}	v_9 — v_{13}	v_{14} — v_{10}
第24日	v_{-1} — v_{14}	v_0 — v_7	v_1 — v_8	v_2 — v_9
	v_{10} — v_3	v_{11} — v_4	v_{12} — v_5	v_{13} — v_5

表 4 - 1　16チームによる例題(5)

開催日	日程			
第25日	v_{-1} — v_{12}	v_0 — v_{13}	v_1 — v_{14}	v_2 — v_7
	v_3 — v_8	v_4 — v_9	v_5 — v_{10}	v_6 — v_{11}
第26日	v_{11} — v_{-1}	v_{12} — v_0	v_{13} — v_1	v_{14} — v_2
	v_7 — v_3	v_8 — v_4	v_9 — v_5	v_{10} — v_6
第27日	v_{-1} — v_{10}	v_0 — v_{11}	v_1 — v_{12}	v_2 — v_{13}
	v_3 — v_{14}	v_4 — v_7	v_5 — v_8	v_6 — v_9
第28日	v_9 — v_{-1}	v_{10} — v_0	v_{11} — v_1	v_{12} — v_2
	v_{13} — v_3	v_{14} — v_4	v_7 — v_5	v_8 — v_6
第29日	v_{-1} — v_8	v_0 — v_9	v_1 — v_{10}	v_2 — v_{11}
	v_3 — v_{12}	v_4 — v_{13}	v_5 — v_{14}	v_6 — v_7
第30日	v_7 — v_{-1}	v_8 — v_0	v_9 — v_1	v_{10} — v_2
	v_{11} — v_3	v_{12} — v_4	v_{13} — v_5	v_{14} — v_6

Algorithm RRHA-2.

Begin

　$j := -1$;

　for $x := 0$ **to** 1 **do**

　　begin

　　　$p := n-1$; $r := 1$;

　　　for $z := 1$ **to** k **do**

　　　　begin

　　　　　$t := r$; $r := 2r$; $p := (p-1)/2$;

　　　　　$y := \mathrm{div}(t, 2)$;

　　　　　{$\mathrm{div}(t, 2)$ は t を 2 で割った商を表す}

　　　　for $h := 1$ **to** t **do**

　　　　　if $z = k$ **and** $h = 2$ **then** $j := j-1$

　　　　　else Fact-F_{j+h}; {$j = 0, 1, \cdots, n-2, n, n+1, \cdots, 2n-3$ について，有向辺集合（1 -因子）F_j を作る}

　　　　$j := j+t$

　　　end;

　　if $x = 0$ **then**

　　　begin

```
          Fact-F_{n-1};{有向辺集合（1-因子）F_{n-1}を
                    作る}
          j:=j+1
        end
      end
End.
Procedure Fact-F_{j+h}.
Begin
  F_{j+h}:=φ;
  for f:=0 to p do
    for q:=1 to t do
      begin
        a:=mod(t-h+q-1, t)+t-1;
        if h is odd then
          if h=1 and q>y then
            if x=0 then
              F_{j+h}:=F_{j+h}∪{(v_{rf+q-2}, v_{rf+a})}
            else
              F_{j+h}:=F_{j+h}∪{(v_{rf+a}, v_{rf+q-2})}
          else
            if x=0 then
              F_{j+h}:=F_{j+h}∪{(v_{rf+a}, v_{rf+q-2})}
            else
              F_{j+h}:=F_{j+h}∪{(v_{rf+q-2}, v_{rf+a})}
        else
          if h=t and (p is odd) and q<t then
            if x=0 then
              F_{j+h}:=F_{j+h}∪{(v_{rf+a}, v_{rf+q-2})}
            else
              F_{j+h}:=F_{j+h}∪{(v_{rf+q-2}, v_{rf+a})}
          else
            if x=0 then
              F_{j+h}:=F_{j+h}∪{(v_{rf+q-2}, v_{rf+a})}
            else
              F_{j+h}:=F_{j+h}∪{(v_{rf+a}, v_{rf+q-2})}
      end
End.
Procedure Fact-F_{n-1}.
Begin
  F_{n-1}:=φ;
  for q:=1 to t do
    begin
      a:=mod(t-2+q-1, t)+t-1;
      F_{n-1}:=F_{n-1}∪{(v_a, v_{q-2})}
    end
End.
```

ここで，アルゴリズム RRHA-2で使用した変数xについて，$x=0$のときは有向辺集合$F_0, F_1, \cdots, F_{n-2}$, と$F_{n-1}$を作成し，$x=1$のときは有向辺集合$F_n, F_{n+1}, \cdots, F_{2n-3}$を作成する。また，$j=0, 1, \cdots, (n-2)/2$について，$F_{n+j}$の有向辺の方向は$F_j$の有向辺の方向とすべて逆になっており，$F_{n-1}$の有向辺の方向は$F_{n/2}$の有向辺の方向とすべて逆になっており，$j=(n+2)/2, (n+4)/2, \cdots, n-2$について，$F_{n+j-1}$の有向辺の方向は$F_j$の有向辺の方向とすべて逆になっている。

表4-1は，アルゴリズム RRHA-2を$n=16$について適用した例である。$j=0, 1, \cdots, 29$について，第$j+1$日目のスケジュールと有向辺集合F_jが対応する。また，対戦「v_p-v_q」($p=0, 1, \cdots, 15, q=0, 1, \cdots, 15, p\neq q$)と有向辺$(v_p, v_q)$が対応する。

$x=0$のときは，$z=1$のときF_0を，$z=2$のときF_1, F_2を，$z=3$のときF_3, F_4, F_5, F_6を，$z=4$のとき$F_7, F_8, \cdots, F_{14}$をそれぞれ作成し，最後にF_{15}を作成する。F_{15}はF_8の有向辺の方向をすべて逆にしたものである。

次に，$x=1$のときは，$z=1$のときF_{16}を，$z=2$のときF_{17}, F_{18}を，$z=3$のとき$F_{19}, F_{20}, F_{21}, F_{22}$,を，$z=4$のとき$F_{23}, F_{24}, \cdots, F_{29}$をそれぞれ作成する。$F_{16}, F_{17}, \cdots, F_{23}$は$F_0, F_1, \cdots, F_7$の有向辺の方向をそれぞれに逆にしたものであり，$F_{24}, F_{25}, \cdots, F_{29}$は$F_9, F_{10}, \cdots, F_{14}$の有向辺の方向をそれぞれ逆にしたものである。

補題4．3：$k\geqq 3$であるような整数kについて，$n=2^k$のとき，アルゴリズム RRHA-2によってスケジューリングされたnチームのホームアンドアウェイによる2回戦総当たりの日程は，「制約条件2」を充たす。

証明：まず，アルゴリズム RRHA-2の変数xについて，$x=0$の場合を考える。このとき，アルゴリズム RRHA-2の変数zに関する帰納法を用いる。

［I］ $z=1$の場合を考える。このとき，アルゴリズム RRHA-2は以下の(1)～(2)を行う：

(1) K'_nの点集合$V(K'_n)=\{v_{-1}, v_0, v_1, \cdots, v_{n-2}\}$を$p+1$($p=(n-2)/2$)組の点集合$V_0=\{v_{-1}, v_0\}$, $V_1=\{v_1, v_2\}, \cdots, V_p=\{v_{n-3}, v_{n-2}\}$に分ける。

(2) 有向辺集合$F_0=\{(v_{-1}, v_0), (v_1, v_2), \cdots, (v_{n-3}, v_{n-2})\}$を作成する。この時点で，$f=0, 1, \cdots, p$につい

て，$\alpha_{2f-1}(0)-\beta_{2f-1}(0)=1, \beta_{2f}(0)-\alpha_{2f}(0)=1$ となる。

［II］次に，$1 \leqq h < k$ であるような整数 h について，変数 z を $z=1, 2, \cdots, h$ の順に実行した段階で，以下の条件（C 1）～（C 5）が成り立っていると仮定する：

（C 1）　有向辺集合 $F_0, F_1, \cdots, F_{t'}$ が作成されている。ただし，$t'=2^h-2$ である。

（C 2）　K'_n の点集合 $V(K'_n)=\{v_{-1}, v_0, v_1, \cdots, v_{n-2}\}$ は $p+1=n/2^h$ 組の点集合 $V_0=\{v_{-1}, v_0, \cdots, v_{t-2}\}$, $V_1=\{v_{t-1}, v_t, \cdots, v_{2t-2}\}, \cdots, V_p=\{v_{pt-1}, v_{pt}, \cdots, v_{(p+1)t-2}\}$ に分けられる。ただし，$t=2^h$ である。

（C 3）　任意の２点 $u, v \in V_f (f=0, 1, \cdots, p, p+1=n/2^h)$ について，$((u, v) \in A_{t'}, (v, u) \notin A_{t'})$ または $((v, u) \in A_{t'}, (u, v) \notin A_{t'})$ である。ただし，$t'=2^h-2$ である。

（C 4）　任意の点 $v_{ft+q-2} \in V_f (f=0, 1, \cdots, p, p+1=n/2^h, q=1, 2, \cdots, t, t=n/2^h)$ について，$|\alpha_{ft+q-2}(j)-\beta_{ft+q-2}(j)| \leqq 1 (j=0, 1, \cdots, t', t'=2^h-2)$ である。

（C 5）　任意の点 $v_{ft+q-2} \in V_f (f=0, 1, \cdots, p, p+1=n/2^h, q=1, 2, \cdots, t, t=n/2^h)$ について，

① $f=0, 2, 4, \cdots, p-1, q=1, 2, \cdots, t/2$ のとき，$\alpha_{ft+q-2}(t')-\beta_{ft+q-2}(t')=1$ である。

② $f=0, 2, 4, \cdots, p-1, q=t/2+1, t/2+2, \cdots, t$ のとき，$\beta_{ft+q-2}(t')-\alpha_{ft+q-2}(t')=1$ である。

③ $f=1, 3, 5, \cdots, p, q=1, 2, \cdots, t/2-1, t$ のとき，$\beta_{ft+q-2}(t')-\alpha_{ft+q-2}(t')=1$ である。

④ $f=1, 3, 5, \cdots, p, q=t/2, t/2+1, \cdots, t-1$ のとき，$\alpha_{ft+q-2}(t')-\beta_{ft+q-2}(t')=1$ である。

ただし，$t'=2^h-2$ である。

（$h=1$ のとき，つまり［I］で F_0 が作成された段階では，明らかに上記（C 1）～（C 5）は成り立っている。）

［III］［II］の仮定の下で，$z=h+1$ の場合を考える。このとき，アルゴリズム RRHA-2は有向辺集合 $F_{t'+1}, F_{t'+2}, \cdots, F_{t'+t} (t'=2^h-2, t=2^h)$ を以下の「III-1～III-4」のように作成する：$p+1=n/2^h$ について，

III-1：有向辺集合

$$F_{t'+1}=\{(v_{(f+1)t+a-1}, v_{ft+q-2}) \mid f=0, 2, 4, \cdots, p-1, q=1, 2, \cdots, t/2\} \cup \{(v_{ft+q-2}, v_{(f+1)t+a-1}) \mid f=0, 2, 4, \cdots, p-1, q=t/2+1, t/2+2, \cdots, t\}$$

を作成する。ただし，$a=\mathrm{mod}(q+t-2, t)$ である。

このとき，$b=-1, 0, 1, \cdots, n-2$ について，$\alpha_b(t'+1)=\beta_b(t'+1)$ となる。

III-2：$j=t'+2, t'+4, t'+6, \cdots, t'+t-2$ について，有向辺集合

$$F_j=\{(v_{ft+q-2}, v_{(f+1)t+a-1}) \mid f=0, 2, 4, \cdots, p-1, q=1, 2, \cdots, t\}$$

を作成する。ただし，$a=\mathrm{mod}(q+t-j+t'-1, t)$ である。

このとき，$j=t'+2, t'+4, t'+6, \cdots, t'+t-2, f=0, 2, 4, \cdots, p-1, q=1, 2, \cdots, t$ について，

$$\alpha_{ft+q-2}(j)-\beta_{ft+q-2}(j)=1,$$
$$\beta_{(f+1)t+a-1}(j)-\alpha_{(f+1)t+a-1}(j)=1$$

である。

III-3：$j=t'+3, t'+5, t'+7, \cdots, t'+t-1$ について，有向辺集合

$$F_j=\{(v_{(f+1)t+a-1}, v_{ft+q-2}) \mid f=0, 2, 4, \cdots, p-1, q=1, 2, \cdots, t\}$$

を作成する。ただし，$a=\mathrm{mod}(q+t-j+t'-1, t)$ である。

このとき，$b=-1, 0, 1, \cdots, n-2$ について，$\alpha_b(j)=\beta_b(j)$ となる。

III-4：次の２つのケースに分けられる：

〈A〉有向辺集合

$$F_{t'+t}=\{(v_{ft+q-2}, v_{(f+1)+q-2}) \mid f=0, 4, 8, \cdots, p-3, q=1, 2, \cdots, t\}$$

を作成する。

このとき，$f=0, 4, 8, \cdots, p-3, q=1, 2, \cdots, t$ について，

$$\alpha_{ft+q-2}(t'+t)-\beta_{ft+q-2}(t'+t)=1,$$
$$\beta_{(f+1)t+q-2}(t'+t)-\alpha_{(f+1)t+q-2}(t'+t)=1$$

である。

〈B〉有向辺集合

$$F_{t'+t}=\{(v_{(f+1)+q-2}, v_{ft+q-2}) \mid f=2, 6, 10, \cdots, p-1, q=2, \cdots, t-1\} \cup \{(v_{(f+1)t-2}, v_{(f+2)t-2})\}$$

を作成する。

このとき，$f=2, 6, 10, \cdots, p-1, q=1, 2, \cdots, t-1$ について，

$$\beta_{ft+q-2}(t'+t)-\alpha_{ft+q-2}(t'+t)=1,$$
$$\alpha_{(f+1)t+q-2}(t'+t)-\beta_{(f+1)t+q-2}(t'+t)=1$$

であり，

$$\alpha_{(f+1)t-2}(t'+t)-\beta_{(f+1)t-2}(t'+t)=1,$$
$$\beta_{(f+2)t-2}(t'+t)-\alpha_{(f+2)t-2}(t'+t)=1$$

である。

［IV］さらに，$z=h+1$ のときに，アルゴリズム RRHA-2は，$V'_0=V_0 \cup V_1, V'_1=V_2 \cup V_3, \cdots, V'_{p'-1}=V_{p-2} \cup V_{p-1}$ とする。ただし，$p'+1=(p+1)/2=n/2^{h+1}$ である。

よって，[II]の仮定と[III][IV]の議論より，変数 z を $z=1,2,\cdots,h,h+1$ の順に実行した段階で，上記の条件(C1)～(C5)と同様に以下の条件(C1′)～(C5′)が成り立つ：

(C1′) 有向辺集合 $F_0, F_1, \cdots, F_{r'}$ が作成されている。ただし，$r'=2^{h+1}-2$ である。

(C2′) K'_n の点集合 $V(K'_n)=\{v_{-1}, v_0, v_1, \cdots, v_{n-2}\}$ は $p'+1=n/2^{h+1}$ 組の点集合 $V_0=\{v_{-1}, v_0, \cdots, v_{r-2}\}$, $V_1=\{v_{r-1}, v_r, \cdots, v_{2r-2}\}$, $\cdots$, $V_{p'}=\{v_{p'r-1}, v_{p'r}, \cdots, v_{(p'+1)r-2}\}$ に分けられる。ただし，$r=2^{h+1}$ である。

(C3′) 任意の2点 $u, v\in V_f(f=0,1,\cdots,p',p'+1=n/2^{h+1}$ について，$((u,v)\in A_{r'},(v,u)\notin A_{r'})$ または $((v,u)\in A_{r'},(u,v)\notin A_{r'})$ である。ただし，$r'=2^{h+1}-2$ である。

(C4′) 任意の点 $v_{fr+q-2}\in V_f(f=0,1,\cdots,p',p'+1=n/2^{h+1}, q=1,2,\cdots,r, r=n/2^{h+1})$ について，$|\alpha_{fr+q-2}(j)-\beta_{fr+q-2}(j)|\leqq 1(j=0,1,\cdots,r', r'=2^{h+1}-2)$ である。

(C5′) 任意の点 $v_{fr+q-2}\in V_f(f=0,1,\cdots,p',p'+1=n/2^{h+1}, q=1,2,\cdots,r, r=n/2^{h+1})$ について，

① $f=0,2,4,\cdots,p'-1, q=1,2,\cdots,r/2$ のとき，$\alpha_{fr+q-2}(r')-\beta_{fr+q-2}(r')=1$ である。

② $f=0,2,4,\cdots,p'-1, q=r/2+1, r/2+2,\cdots,r$ のとき，$\beta_{fr+q-2}(r')-\alpha_{fr+q-2}(r')=1$ である。

③ $f=1,3,5,\cdots,p', q=1,2,\cdots,r/2-1, r$ のとき，$\beta_{fr+q-2}(r')-\alpha_{fr+q-2}(r')=1$ である。

④ $f=1,3,5,\cdots,p', q=r/2, r/2+1,\cdots,r-1$ のとき，$\alpha_{fr+q-2}(r')-\beta_{fr+q-2}(r')=1$ である。

ただし，$r'=2^{h+1}-2$ である。

上記の[II][III]及び[IV]の議論より，アルゴリズムRRHA-2が $x=0$ のときに変数 z を $z=1,2,\cdots,k$ の順に実行した段階で，以下の条件(C5)～(C8)を充たす：

(C5) 有向辺集合 $F_0, F_1, \cdots, F_{n-2}$ が作成されている。

(C6) 任意の2点 $u, v\in V(K'_n)=\{v_{-1}, v_0, \cdots, v_{n-2}\}$ について，$((u,v)\in A_{n-2},(v,u)\notin A_{n-2})$ または $((v,u)\in A_{n-2},(u,v)\notin A_{n-2})$ である。

(C7) 任意の点 $v_{q-2}\in V(K'_n)(q=1,2,\cdots,n)$ について，$|\alpha_{q-2}(j)-\beta_{q-2}(j)|\leqq 1(j=0,1,\cdots,n-2)$ である。

(C8) 任意の点 $v_{q-2}\in V(K'_n)(q=1,2,\cdots,n/2)$ について，$\alpha_{q-2}(n-2)-\beta_{q-2}(n-2)=1$ であり，任意の点 $v_{q-2}\in V(K'_n)(q=n/2+1, n/2+2,\cdots,n)$ のとき，$\beta_{q-2}(n-2)-\alpha_{q-2}(n-2)=1$ である。

$x=0$ の場合，最後に $F_{n-1}=\{(v_{n-3},v_{-1}),(v_{n-2},v_0)\}\cup\{(v_{n/2+q-2},v_q)|q=1,2,\cdots,n/2-2\}$ を作成する。この有向辺集合の有向辺の方向は $F_{n/2}$ の方向とすべて逆になっている。

このとき，$b=-1,0,1,\cdots,n-2$ について，$\alpha_b(n-1)=\beta_b(n-1)$ となる。

次に，アルゴリズムRRHA-2の変数 x について，$x=1$ の場合を考える。このケースは，有向辺集合 $F_n, F_{n+1},\cdots,F_{2n-3}$ を以下の(1)(2)のように作成する：

(1) $j=0,1,\cdots,n/2-1$ について，F_{n+j} の有向辺の方向は F_j の有向辺の方向とすべて逆になっている。

(2) $j=n/2+1, n/2+2,\cdots,n-2$ について，F_{n+j-1} の有向辺の方向は F_j の有向辺の方向とすべて逆になっている。

よって，$F_0, F_1,\cdots,F_{2n-3}$ の和集合は完全グラフ K'_n の有向辺集合と等しく，従って，$j=0,1,\cdots,2n-3$ について，F_j は K'_n の1-因子であり，$F_0, F_1,\cdots,F_{2n-3}$ は K'_n の1-因子分解である。よって，$j=0,1,\cdots,2n-3$ について，アルゴリズムRRHA-2によって作られた有向辺集合 F_j は第 $j+1$ 日目のスケジュールである。

以降，「制約条件2」が満足されていることを示す。

$x=0$ のときと同様の議論で，$x=1$ のときは以下の(1)～(3)が成り立つ：

(1) $b=-1,0,\cdots,n-2, j=0,1,\cdots,3n/2-1$ について，$\alpha_b(j)=\beta_b(j)$ である。

(2) $j=3n/2, 3n/2+2, 3n/2+4,\cdots,2n-4$ について，$v_b(b=-1,0,\cdots,n/2-2)$ は F_j の有向辺の出点であり，$v_{b'}(b'=n/2-1, n/2,\cdots,n-2)$ は F_j の有向辺の入点である。

(3) $j=3n/2+1, 3n/2+3, 3n/2+5,\cdots,2n-3$ について，$v_b(b=-1,0,\cdots,n/2-2)$ は F_j の有向辺の入点であり，$v_{b'}(b'=n/2-1, n/2,\cdots,n-2)$ は F_j の有向辺の出点である。

以上より，$b=-1,0,1,\cdots,n-2, j=0,1,2,\cdots,2n-3$ について，$|\alpha_b(j)=\beta_b(j)|\leqq 1$ が必ず成り立つ。ここで，$F_j(j=0,1,\cdots,2n-3)$ は第 $j+1$ 日目のスケジュールであるので，どのチームも j 試合 $(j=1,2,\cdots,2n-2)$ 消化した時点で，ホームとアウェイの試合消化数の差は高々1であることになる。

また，任意の2点 $v_p, v_q(p=-1,0,1,\cdots,n-2, q=-1,0,1,\cdots,n-2, p\neq q)$ について，条件(C6)より，有向辺 $(v_p,v_q)\in A_{n-2},(v_q,v_p)\notin A_{n-2}$ であると仮定しても，一般性は失われない。このとき，(v_p,v_q) がある有向辺集合 $F_j(j=0,1,\cdots,n-2)$ に存在しているとすると，

$$\begin{cases}(v_q, v_p)\in F_{n+j} & (0\leqq j\leqq n/2-1\text{のとき})\\(v_q, v_p)\in F_{n-1} & (j=n/2\text{のとき})\\(v_q, v_p)\in F_{n+j-1} & (n/2+1\leqq j\leqq n-2\text{のとき})\end{cases}$$

である。ここで，$n\geqq 8$ なので，

$$\begin{cases}(n+j)-j\geqq 8 & (0\leqq j\leqq n/2-1\text{のとき})\\(n-1)-n/2\geqq 3 & (j=n/2\text{のとき})\\(n+j-1)-j\geqq 7 & (n/2+1\leqq j\leqq n-2\text{のとき})\end{cases}$$

となり，このことは，同じチーム同志で続けて対戦しないことを意味する。

以上の議論より，$k\geqq 3$ であるような整数 k について，$n=2^k$ のとき，アルゴリズム RRHA-2によってスケジューリングされた n チームのホームアンドアウェイによる２回戦総当たりの日程は，「制約条件２」を充たす。　■

$n=2^k$(k は $k\geqq 3$ であるような整数) である場合，アルゴリズム RRHA-2は $O(n^2)$ 時間で，ホームアンドアウェイによる２回戦総当たりのリーグ戦を $2n-2$ 日の日程でスケジューリングしている。ここで，K'_n は $n(n-1)$ 本の有向辺をもつので，どのようなアルゴリズムであれ，ホームアンドアウェイによる２回戦総当たりのリーグ戦をスケジューリングするには，最低 $O(n^2)$ 時間かかる。また，K'_n の任意の点 $v_j(j=-1, 0, 1, \cdots, n-2)$ は他のすべての $n-1$ 個の点と有向辺で結ばれているので，どのようなアルゴリズムであれ，リーグ戦全体を完了させるには少なくとも $2n-2$ 日必要である。

よって，$n=2^k$(k は $k\geqq 3$ であるような整数) の場合には，アルゴリズム RRHA-2は最適スケジューリングアルゴリズムである。

よって，次の定理が得られる。

定理５：任意の整数 $n=2^k$(k は $k\geqq 1$ であるような整数) について，

(1)　$k=1$ のとき，及び，$k=2$ のときは，「制約条件２」のもとで，n チームのホームアンドアウェイによる２回戦総当たりのリーグ戦の日程をスケジューリングすることは不可能である。

(2)　$k\geqq 3$ のとき，「制約条件２」のもとで，n チームのホームアンドアウェイによる $2n-2$ 日の２回戦総当たりのリーグ戦の日程を $O(n^2)$ 時間でスケジューリングする最適スケジューリングアルゴリズムが得られる。

５．結　　言

本論文では，グラフ及び有向グラフの１-因子分解[2)]の考え方を用いることにより，以下のようなスケジューリング問題を解くアルゴリズムについて考察した：

(1)　参加チーム数に関係なく，１回戦総当たりのリーグ戦の日程の最適スケジューリングを行う。

(2)　参加チームに関係なく，以下のような制約条件の下で，ホームアンドアウェイによる２回戦総当たりのリーグ戦の日程の最適スケジューリングを行う：

(i)　制約条件なし。

(ii)　**制約条件１**：どのチームも j 試合($j=1, 2, \cdots, 2n-2$)消化した時点で，ホームとアウェイの試合消化数の差が高々１である。

(iii)　**制約条件２**：①　どのチームも j 試合($j=1, 2, \cdots, 2n-2$)消化した時点で，ホームとアウェイの試合消化数の差が高々１である。

②　同じチーム同志が続けて対戦しない。

上記考察について，以下のような結果が得られた：

［１］上記(1)については，チーム数 n に関係なく，$O(n^2)$ 時間で最適スケジュールを構成できるアルゴリズムが得られた。

［２］「制約条件なし」及び「制約条件１」については，チーム数 n に関係なく，$O(n^2)$ 時間で最適スケジュールを構成できるアルゴリズムが得られた。

［３］「制約条件２」については，チーム数 n が偶数か奇数かにより，以下の２とおりの結果が得られた：

①　n が奇数の場合：チーム数に関係なく，$O(n^2)$ 時間で最適スケジュールを構成できるアルゴリズムが得られた。

②　n が偶数の場合：スケジューリング可能な場合と不可能な場合がある。本論文は，$n=2^k$(k は $k\geqq 1$ であるような整数) の場合の考察を行い，$k=1, k=2$ の場合はスケジューリング不可能であり，$k\geqq 3$ の場合は，$O(n^2)$ 時間で最適スケジュールを構成できるアルゴリズムが得られた。

また，本文中で述べたアルゴリズム RR-2とアルゴリズム RRHA-1は，それらの正当性を証明するための道具として，１-因子 $F'_0, F'_1, \cdots, F'_{n-1}(F'_n, F'_{n+1}, \cdots, F'_{2n-1})$ を求めているが，実際のスケジューリングアルゴリズムからは，これらを求める部分は削除すべきである。ただし，これらの部分があってもなくても構成時間 $O(n^2)$ は変わりはない。

本論文での考察とその結果は以上であるが，今後の課題としては，次のようなものがある：

〈1〉「制約条件２」について，チーム数nが偶数の場合：チーム数に関係のない最適スケジューリングアルゴリズムを構築する。(予想としては，$n=2,4,6$の場合は不可能であるが，$n\geqq 8$の場合は最適スケジューリング可能である。)

〈2〉上記以外の様々な制約条件の下でのホームアンドアウェイによる２回戦総当たりのリーグ戦の日程の最適スケジューリングを行うアルゴリズムの構築。

参考文献

[1] 西山豊，**“くらしのアルゴリズム—情報処理の周辺”**，株式会社ナカニシヤ出版，(1989)．

[2] M. Behzad, G. Chartrand and L. L-Foster, “*Graphs and Digraphs,*” Prindle, Weber and Schmidt, (1979).