

福岡工業大学 学術機関リポジトリ

Shielding Current Front in a Superconducting Plate under a Perpendicular Magnetic Field

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2021-02-08 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 野田, 稔 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/11478/00001617

垂直磁界下における超伝導平板中の遮蔽電流前線

野 田 稔 (電子工学科)

Shielding Current Front in a Superconducting Plate
under a Perpendicular Magnetic Field

Minoru NODA (Department of Electronics)

Abstract

When uniform magnetic field is applied perpendicularly to flat surfaces of a superconducting plate, currents are induced in the plate ends and surfaces, so as to shield its interior region from flux penetration. Forms of flux front and also current front are not simple, and difficult to be determined precisely. In order to clear the relation between the external magnetic field and the position of the current front, magnetic shielding conditions are expressed by using uniform current distribution for a hexagonal form of the current front having two parameters, which are determined from two shielding conditions, one is vanishing of field at the center, the other is the second derivative of the field variation set to zero. Using analytical expressions corresponding to shielding conditions, we get reasonable results for the field dependence of the front position, and the field distribution on the center axis of the plate. It can be noted that surface currents have remarkable contribution to internal shielding effect.

Key words: *superconducting plate, perpendicular field, shielding region, hexagonal form of current front, shielding conditions, field distribution*

1. はじめに

厚み $2d_s$ 、幅 $2a$ の無限長超伝導平板に垂直な磁界が印加されたとき、端部からの磁束侵入に対応して遮蔽電流が誘起される。このため、磁界値が小さい場合は、平板の中央部は磁束が入らず、電流も流れない被遮蔽領域ができる。この領域は図1に模式的に示すような形をとると考えられ、電流領域との境界を磁束前線または電流前線と呼ぶ。

超伝導体为非理想的第II種である場合、臨界状態モデル¹⁾を適用すると遮蔽電流密度は超伝導体の臨界電

流密度 J_c に等しい。本研究では、外部磁界 H_e に対する電流前線の侵入度合いを調べることを目的とする。

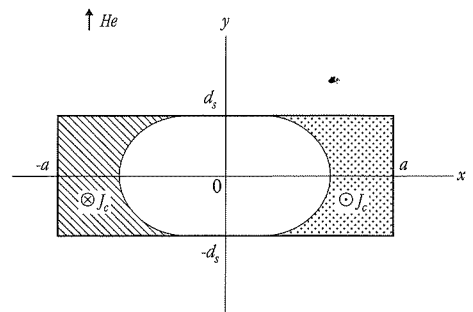


図1 垂直磁界下における超伝導平板中の遮蔽電流分布

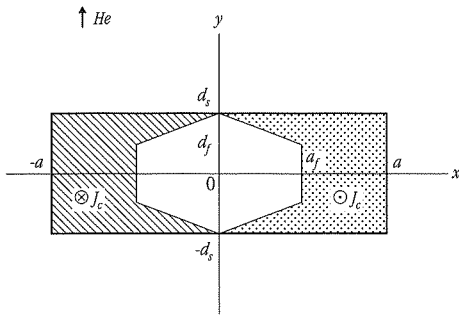


図2 遮蔽電流前線を六角形の区分直線で近似する。前線形状パラメータは a_f と d_f の2個である。

図2に示すように、幅方向に x 軸、厚み方向に y 軸をとり、原点を平板中央に置く。外部磁界 H_e を正の y 軸方向(平板面に垂直方向)に加えたとき、平板左側($x < 0$)で紙面奥向き、右側($x > 0$)で紙面手前向きの遮蔽電流が流れる。そして $-a_f < |x| < a_f$ の間に被遮蔽領域ができるが、この部分の平板上下範囲($d_f < |y| < d_s$)では磁束が表面から侵入する。その遮蔽前線の正確な形状を解析的に求めるのは困難である。

計算を簡単にするために、次の仮定をおく。

- (1) 遮蔽電流密度 J_c を一定とする。
- (2) 平板面に垂直な方向の外部磁界 H_e が印加されたとき、電流前線の形状を図2のような六角形で近似し、2個のパラメータ(a_f , d_f)で表す。
- (3) このような近似で与えた電流前線では、被遮蔽領域全体に渡って外部磁界を遮蔽することは出来ない。そこで、磁界遮蔽条件として、次の2個を与え、上記2個の前線形状パラメータを決定する。
 - ① 平板中央(x, y) = (0, 0)における磁界をゼロとする。
 - ② x 軸上中央近辺の磁界変化の2次微係数をゼロとする。

以下の解析および図表示には Mathematica を活用した。²⁾

2. 電流による磁界

x 軸上の磁界 $H(x)$ は、外部磁界 H_e と遮蔽電流が作る磁界 $H_j(x)$ のベクトル和だが、 $H_j(x)$ は対称性から負の y 方向を向くことがわかる。 $H_j(x)$ を求めるには、図3(a)に示すような平板全域に流れている電流対が x 軸上を作る磁界 $H_{j1}(x)$ から、図3(b)に示すような

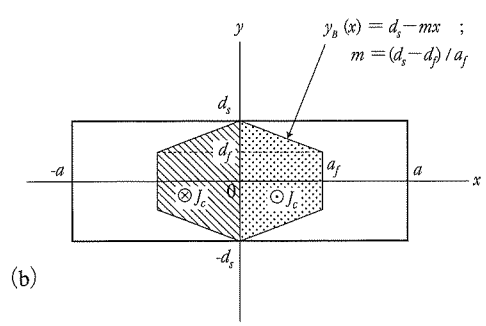
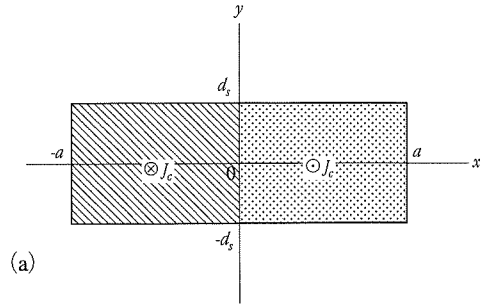


図3 電流分布を(a)と(b)の2つの場合に分け、各々の分布が作る x 軸上の磁界を求めた後に、両者の差をとる。

中央部の六角形領域に流れている電流対が x 軸上に作る磁界 $H_{j2}(x)$ を差し引いて求めるのが簡単でよい。すなわち、

$$H(x) = H_e + H_j(x); \quad H_j(x) = H_{j1}(x) - H_{j2}(x) \quad (2-1)$$

である。今、

$$f(x', y'; x) = \frac{x' - x}{(x' - x)^2 + y'^2} + \frac{x' + x}{(x' + x)^2 + y'^2} \quad (2-2)$$

とすると、 $H_{j1}(x)$, $H_{j2}(x)$ は次式で与えられる。

$$H_{j1}(x) = -\frac{J_c}{\pi} \int_0^a dx' \int_0^{d_s} dy' f(x', y'; x) \quad (2-3)$$

$$H_{j2}(x) = -\frac{J_c}{\pi} \int_0^{a_f} dx' \int_0^{y_B(x)} dy' f(x', y'; x) \quad (2-4)$$

ここに、 $y_B(x)$ は、 $0 < x < a_f$ および $d_f \leq y < d_s$ 間の傾き m の直線状電流前線を与えるものであって、

$$y_B(x) = d_s - mx \quad (2-5)$$

$$m = (d_s - d_f) / a_f \quad (2-6)$$

で与えられる。(2-3)と(2-4)の積分を実行した結果は、次に定義する関数 $u(x; \alpha, \beta, m)$

$$u(x; \alpha, \beta, m) = \alpha \arctan\left(\frac{\beta - mx}{x + \alpha}\right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{x-m\beta}{1+m^2} \arctan\left(\frac{\beta+mx}{x-m\beta+(1+m^2)\alpha}\right) \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\beta+mx}{1+m^2} \log\{(x+\alpha)^2+(\beta-m\alpha)^2\}
 \end{aligned} \tag{2-7}$$

を使って以下のようにまとめられる。

$$\begin{aligned}
 H_{j1}(x) = & -\frac{J_c}{\pi} [u(-x; a, d_s, 0) + u(x; a, d_s, 0) \\
 & - u(-x; 0, d_s, 0) - u(x; 0, d_s, 0)] \tag{2-8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{j2}(x) = & -\frac{J_c}{\pi} [u(-x; a_f, d_s, m) + u(x; a_f, d_s, m) \\
 & - u(-x; 0, d_s, m) - u(x; 0, d_s, m)] \tag{2-9}
 \end{aligned}$$

3. 遮蔽条件

第1の遮蔽条件として、 $x=0$ での総合磁界がゼロになること ($H(0)=0$) を与えると、次の制約式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \frac{2H_e}{\pi J_c a} = & \arctan\left(\frac{d_s}{a}\right) - \frac{a_f}{a} \arctan\left(\frac{d_f}{a_f}\right) \\
 & - \frac{m}{1+m^2} \frac{d_s}{a} \arctan\left(\frac{a_f}{d_f}\right) \\
 & + \frac{1}{2} \frac{d_s}{a} \log\left(\frac{a^2+d_s^2}{d_s^2}\right) - \frac{1}{2} \frac{d_s}{a} \frac{1}{1+m^2} \log\left(\frac{a_f^2+d_f^2}{d_s^2}\right)
 \end{aligned} \tag{3-1}$$

次に、 x 軸上の磁界分布を $x=0$ 付近で x のべき乗展開すると、

$$H(x) = H(0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \Big|_{x=0} x^2 + \dots \tag{3-2}$$

となるが、 x の奇数次項は対称性により生じない。 $H(0)=0$ を (3-1) により与えれば、残りの主項は x^2 の項であるから、第2の遮蔽条件として x^2 項の係数 (2次微係数) をゼロととるのは自然であろう。

$H(x)$ の2次微係数の計算のため、まず (2-7) 式で与えた関数 $u(x; \alpha, \beta, m)$ を x で2回微分すれば、次の結果を得る。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{m(x+2\alpha) - \beta}{(1+m^2)\{(x+\alpha)^2 + (m\alpha - \beta)^2\}} \tag{3-3}$$

この結果の $x \rightarrow 0$ の極限をとって、それを $v(\alpha, \beta, m)$ と記すことにする。

$$v(\alpha, \beta, m) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{2m\alpha - \beta}{(1+m^2)\{\alpha^2 + (m\alpha - \beta)^2\}} \tag{3-4}$$

すると、 $H(x)$ の2次微係数の $x \rightarrow 0$ の極限は、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = & -\frac{2J_c}{\pi} [v(a, d_s, 0) + v(0, d_s, 0) \\
 & - v(a_f, d_s, m) + v(0, d_s, m)] \tag{3-5}
 \end{aligned}$$

となるから、第2の遮蔽条件として上式右辺の [] 中をゼロと与えればよい。その結果に (2-6) 式の m を代入してまとめると、次の非常に簡単な関係式が導ける。

$$d_f/a_f = d_s/a \tag{3-6}$$

これは、電流前線の屈曲点 (a_f, d_f) が平板中央の原点 (0, 0) と平板の角 (a, d_s) を結ぶ直線上を走ることを与えていて、単純で分かりやすい結果である。

4. 電流前線 a_f の値と x 軸上の磁界分布

与えられた外部磁界 H_e に対して電流前線 a_f がどこまで侵入するかを調べるには、第2の遮蔽条件である (3-6) 式を、第2の遮蔽条件である (3-1) 式に代入すればよい。ただし、その結果の式は、与えた H_e に対して直接 a_f を求めることが困難な超越方程式である。

そこで、 a_f の値を 0 ~ 1 の間に変化させたとき、(3-1) の両辺を $(\pi/2)$ で除した $H_e/J_c a$ の値を数值的に求めて、プロットすると図4の結果が得られた。平板半幅 $a=1$ に対して、平板の半厚み d_s を 0.1 ~ 0.5 の5通りとってプロットしてある。 a_f の減少と H_e の増加が関連づけられている様子が見える。

図4の結果から、 H_e の値を与えたとき a_f の値がどうなるかを読み取って、グラフにプロットしたものを図5に示す。これは、 $a=1, d_s=0.1$ の場合を例に

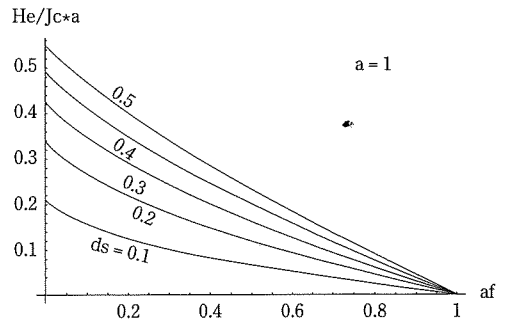


図4 印加磁界 H_e と前線位置 a_f の関係を示す結果。 $d_s=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ の5個の場合のプロット曲線が引かれている。

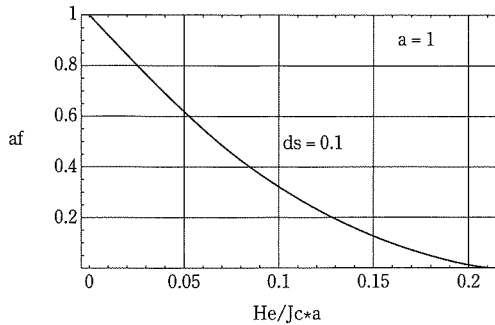


図5 $a = 1, d_s = 0.1$ の場合, 図4から読み取った a_f の H_c 依存性。

とっている。図4の縦軸と横軸をひっくり返したただだが、与えた H_c に対する a_f の値を得るのに便利な表示方である。

図5のグラフの1点 ($H_c/J_c a, a_f$) = (0.028, 0.7972) の場合について、 x 軸上の磁界分布を調べた結果を図6に示す。 $H(x)$ のべき展開の x^2 項が消えているため、原点から a_f の半分以上の範囲 ($0 < x < 0.55$) でほとんど $H(x) = 0$ が満たされている様子が見える。 a_f に近い部分 ($0.55 < x < 0.8$) では遮蔽ができていないが、これは電流前線を六角形の区分直線近似したせいである。約 $0.8 < x < 1$ の範囲で磁界が急激に立ち上がっているのは、そこが電流領域だからである。

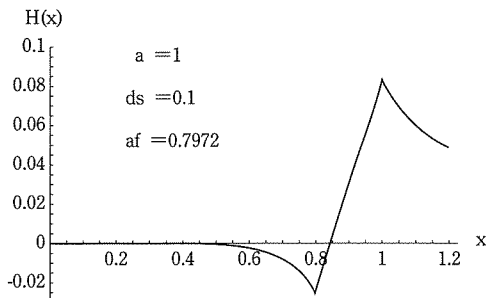


図6 $a = 1, d_s = 0.1, a_f \approx 0.8$ の場合, x 軸上の磁界分布。

比較のため、電流領域を $a_f \leq |x| \leq a, 0 \leq |y| \leq d_s$ の単純な矩形範囲に設定して (常に $d_f = d_s$)、形状パラメータを a_f のみにした場合の計算も行ってみた。この場合は原点で磁界ゼロの条件だけで a_f を決めることができる。図6とほぼ同じ条件 ($a = 1, d_s = 0.1,$

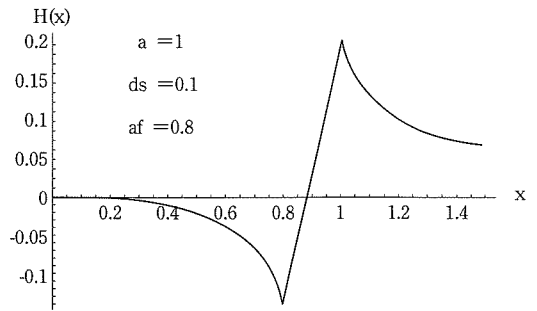


図7 矩形電流前線 ($d_f = d_s$ のため、パラメータは a_f 一つのみ) 近似で、図6と同じ条件 ($a = 1, d_s = 0.1, a_f \approx 0.8$) の場合の x 軸上の磁界分布。

$a_f \approx 0.8$) で x 軸上の磁界分布を調べた結果を図7に示す。原点から少し離れたとすぐに磁界が増加しており、図6と比べて遮蔽度合いが悪いことが分かる。 $a_f \approx 0.8$ 付近の磁界値は図6の場合の約7倍に達する。

六角形の電流前線を考慮したことの意義は、平板端部から中央表面部に伸びる電流の遮蔽効果がかなり大きいことを第1近似で示したことにあると思われる。

5. ま と め

遮蔽電流前線を図2のような六角形の区分直線で近似して、2個の形状パラメータを2個の遮蔽条件で決定し、合理的な結果を導くとともに、平板表面の遮蔽電流の効果がかなり大きいことを示すことが出来た。今後の展開として、電流前線の形状をより精密なものに近づける作業が必要になると思われる。

本研究の遂行上必要だった Mathematica の活用にあたり、工学部電子工学科大富賢一氏の手厚いご指導と助言を受けた。紙上で御礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) F. Irie and K. Yamafuji: J.Phys. Soc. Japan 23 (1967) 255.
- 2) Wolfram Research