Title	極大平面的グラフの同サイズの2つの木と連結成分に対する構成可能性に関する考察
Author(s)	高橋　昌也
Citation	福岡工業大学研究論集　第52巻第1号　P31-P50
Issue Date	2019-9
URI	http://hdl.handle.net/11478/1367
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	Publisher

極大平面的グラフの同サイズの２つの木と連結成分に対する構成可能性に関する考察

高　橋　昌　也（短期大学部，情報メディア学科）

A consideration of a maximal planar graph constructed from two same size trees and a connected component

Masaya TAKAHASHI (Department of Information and Multimedia Technology)

Abstract

For any integer $n \geqq 3$, let G be the maximal planar graph with n vertices and $m=3n-6$ edges, and, T_1 and T_2 be any two trees with $n-1$ vertices and $n-2$ edges each other. If G contains T_1 and T_2 then we define the following subgraphs G' and G'' of G as follows. Let G' be a graph obtained by deleting edges of T_1 and T_2. Furthermore, let G'' be a graph obtained by deleting isolate vertices of G'. In this paper, we consider the problem to determine whether there is a maximal planar graph G such that T_1 and T_2 are contained in G and G'' is simple and connected subgraph with $n-2$ edges obtained from G, in the $3 \leqq n \leqq 7$ case. As a conclusion, we can obtain that the answer of the problem is "yes". In this paper, we discuss the detail of our consideration as the following (1) and (2).

(1) If $n=7$, T_1 and T_2 are star type trees as table 3.8 described below, and G is the maximal planar with 7 vertices and 15 edges as table 4.6 described below, then G can not contain T_1 and T_2 in the same time.

(2) Otherwise, G can contain T_1 and T_2, and G'' which is simple and connected subgraph with $n-2$ edges obtained from G.

Key words: *graph theory, maximal planar graph, tree, connected component*

１．はじめに

筆者は以前『同じサイズの３つの木が極大平面的グラフにパッキング可能かどうかという問題』を以下の「問題Ａ」として提起・考察した[36)]。

問題Ａ：$n \geqq 3$ を満たす任意の整数 n について，G を頂点の数が n で，辺の数が $m=3n-6$ となるような任意の極大平面的グラフとする。このとき，辺の数がすべて $n-2$ であるような３つの任意の木 T_1，T_2，T_3 は G にパッキング可能であるかどうか。

「問題Ａ」を考察した結果を述べる前に，まずグラフのパッキングに関する問題について，歴史的経過を交えて説明する。

k 個のグラフの集合 H_1，H_2，．．．．，H_k がグラフ G に**パッキング可能**であるとは，互いに辺を共有しないような部分グラフ H_1，H_2，．．．．，H_k により G が構成できることをいう。パッキングに関する問題としてよく知られている問題に，**理想木予想**がある。この問題は Gyárfás と Lehel により提案され[5),18)]，特別なケース[3),9),12),15-16),26),32,34)]を除いては現在も未解決である[35)]。なお，理想木予想とは，以下のような問題である。

理想木予想：任意の整数 n について，辺の数がそれぞれ 0，1，2，．．．．，$n-1$ であるような n 個の任意の木 T_1，T_2，．．．．，T_n は完全グラフ K_n にパッキング可能である。

また，以下のような問題についても調べてみた。

問題Ｂ：任意の整数 n について，辺の数がすべて n であるような $2n+1$ 個の任意の木 T_1，T_2，．．．．，T_{2n+1} は完全グラフ K_{2n+1} にパッキング可能であるかどうか。

この問題については，T_1，T_2，．．．．，T_{2n+1} が同型の場合について1963年に Ringel により「可能ではないか」ということで提案され[28-29)]，Kotzig により現在よく知られている **Ringel-Kotzig 予想**として定着している[29)]。そして1967年に Rosa により graceful labeling や rosy labeling

2019年５月29日受付

などのラベリングによる解法が提案されている[29]が，やはり特別なケース[1-4),6-8),10-11),13-14),19-25),29-30),33),35]を除いては現在も未解決問題である[17]。このように，T_1, T_2, ．．．．，T_{2n+1} が同型の場合ですら上記の「問題Ａ」は未解決であるので，任意の T_1，T_2，．．．．，T_{2n+1} について「問題Ｂ」は当然未解決問題である。このように，グラフのパッキングに関する問題は長年未解決なままの難解な問題が多く存在する。

以上を踏まえて「問題Ａ」を考察した結果は以下の表1.1〜1.3のとおりである（◯が可，×が否）。ただし，同型でない木や同型でない極大平面的グラフの定義は第２章に記述する。

ここで，n=3，4のときは n−2本の辺からなる木，n 個の頂点からなる極大平面的グラフはそれぞれ１種類である。n=5のときは３本の辺からなる同型でない木は２種類，５個の頂点からなる極大平面的グラフは１種類である。n=6のときは４本の辺からなる同型でない木は２種類，６個の頂点からなる同型でない極大平面的グラフは２種類である。

表1.1　n 頂点からなる極大平面的グラフのパッキングの可否（n=3，4）

n の値	パッキングの可否
3	◯
4	◯

表1.2　５頂点からなる極大平面的グラフのパッキングの可否

木の型			パッキングの可否
T_1	T_2	T_3	
1	1	1	◯
1	1	2	◯
1	2	2	◯
2	2	2	◯

上記表1.1及び1.2と下記の表1.3より，「問題Ａ」は n=6の時点で不可能な T_1，T_2，T_3 の組合せが出現したため，可能な組合せに共通した性質が見つからない限り，純粋な研究対象として議論を発展させていくことは難しいことが分かった。

そして，表1.1〜1.3より，以下のような「問題A’」に対しても否定的な答が得られることが分かった。

問題A’：n≧3を満たす任意の整数 n について，T_1，T_2，T_3 を辺の数が n−2となるような３つの任意の木とする。このとき，頂点の数が n，辺の数が m=3n−6，かつ T_1，T_2，T_3 がパッキング可能であるような極大平面的グラフ G が必ず存在するかどうか。

表1.3　６頂点からなる極大平面的グラフのパッキングの可否

木の型			パッキングの可否	
			極大平面的グラフの型	
T_1	T_2	T_3	A	B
1	1	1	×	×
1	1	2	◯	×
1	1	3	◯	×
1	2	2	◯	×
1	2	3	◯	◯
1	3	3	◯	◯
2	2	2	◯	◯
2	2	3	◯	◯
2	3	3	◯	◯
3	3	3	◯	◯
3	3	3	◯	◯

しかし，世の中には『汎用的な解法』は存在しなくても，制約条件を強めたり弱めたり，あるいは構成要件を変化させたりすることで，『限定的な解法』を得られることがある。NP 完全問題に対する近似アルゴリズムなどその代表的な例である。

そこで，本稿では「問題Ａ及びA’」の条件を緩和した以下の２つの問題について考察した。

問題Ｃ：n≧3を満たす任意の整数 n について，G を頂点の数が n で，辺の数が m=3n−6となるような任意の極大平面的グラフとし，T_1，T_2 を辺の数が n−2であるような２つの任意の木とする。このとき，G について以下の⑴⑵が成り立つかどうか。

⑴　G は互いに辺を共有しないように T_1，T_2 を含むことができる。

⑵　G から T_1，T_2 の辺を除去し，その結果孤立点となった頂点も除去して得られた部分グラフ H は n−2本の辺からなる単純な連結グラフである。

問題C’：n≧3を満たす任意の整数 n について，T_1，T_2 を辺の数が n−2であるような２つの任意の木とする。このとき，頂点の数が n，辺の数が m=3n−6，かつ以下の⑶⑷が成り立つような極大平面的グラフ G が必ず存在するかどうか。

⑶　G は互いに辺を共有しないように T_1，T_2 を含むことができる。

⑷　G から T_1，T_2 の辺を除去し，その結果孤立点となった頂点も除去して得られた部分グラフ H は n−2本の辺

からなる単純な連結グラフである。

考察の結果は以下の(A1)(A2)のとおりであり，以降の章ではその詳細について述べる。

(A1)　$3 \leqq n \leqq 6$ のとき，「問題Ｃ及びＣ'」の答はともに“Yes”である。

(A2)　$n=7$ のとき，「問題Ｃ」の答は“No”，「問題Ｃ'」の答は“Yes”である。

２．基礎的定義

グラフ G は，**頂点**とよばれる有限な空でない要素の集合 $V(G)$ と，**辺**とよばれる $V(G)$ の相異なるペアの部分集合 $E(G)$ からできている[5)]。特に，本稿では $V(G)=\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ と表し，n を**位数**と呼び，頂点の個数とする。明らかに $n \geqq 1$ である。このとき，$E(G)$ は考えられるすべての $V(G)$ のペア (v_i, v_j) の部分集合となる。(ただし，$i=1, 2, ..., n-1$，$j=i+1, i+2, ..., n$ である。)また，$E(G)$ の要素の数を m と表し，サイズと呼ぶ。ここで，文脈から明らかなときは，G の頂点の集合，辺の集合をそれぞれ単に V，E してもよい。

また，G の任意の異なる２つの頂点 v_i，v_j について，辺 (v_i, v_j) が存在するとき，v_i と v_j は互いに**隣接している**といい，辺 (v_i, v_j) は頂点 v_i と v_j を**結ぶ**という。また，頂点 v_i，v_j はそれぞれ辺 (v_i, v_j) に**接合している**という。このとき，すべての $i=1, 2, ..., n-1$，$j=i+1, i+2, ..., n$ について，$|(v_i, v_j)| \leqq 1$ のとき G を**単純グラフ**といい，そうでないとき**多重グラフ**という。

G の各頂点 v_i ($i=1, 2, ..., n$) に隣接している頂点の個数 s_i のことを v_i の**次数**とよぶ。

以上がグラフに関する最小限の用語等の定義である。通常ではグラフは図で表すと視覚的に非常に分かり易いが，比較的広いスペースを要し，作図に手間と時間がかかるため，原則として下記の表2.1のような**隣接表**によりグラフを表現することにする。ただし，すべての整数 $i=1, 2, ..., n$，$j=1, 2, ..., n$ について，以下の式［A］を満足する。

表2.1　n 頂点からなるグラフの隣接表

点番号	v_1	v_2	....	v_n
v_1	x_{11}	x_{12}	....	x_{1n}
v_2	x_{21}	x_{22}	....	x_{2n}
:	:	:	....	:
v_n	x_{n1}	x_{n2}	....	x_{nn}
次数	s_1	s_2	....	s_n

$$x_{ij}=\begin{cases}\bigcirc：v_i \text{ と } v_j \text{ が隣接している場合} \\ \times：v_i \text{ と } v_j \text{ が隣接してない場合}\end{cases} \cdots［\mathrm{A}］$$

例１：$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$，$E=\{(v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5)\}$ とすると，G は以下の表2.2のように表すことができる。

このとき，$n=5$，$m=7$ となり，各頂点 v_1，v_2，v_3，v_4，v_5 の次数はそれぞれ２，３，３，３，３である。(例１終了)

表2.2　　題１の隣接表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	×	○	×	×	○
v_2	○	×	○	○	×
v_3	×	○	×	○	○
v_4	×	○	○	×	○
v_5	○	×	○	○	×
次数	2	3	3	3	3

次に，パッキングに関する定義を述べる。２つのグラフ $G=(V, E)$ と $G'=(V', E')$ について，$V' \subseteq V$ かつ $E' \subseteq E$ であるとき G' は G の**部分グラフ**であるという。k 個のグラフの集合 H_1，H_2，....，H_k について，G がグラフ H_1，H_2，....，H_k により**パッキング可能**であるとは，互いに辺を共有しないような部分グラフ H_1，H_2，....，H_k により G が構成できることをいう。本稿の論考に関連はあるが，主題ではないパッキングに関する記述はページ数の関係で省略する。(先行論文[36)]を参照せよ。)

また，木とそれに関連する定義を述べる。u，v をグラフ G の任意の２頂点とする。G の $\boldsymbol{u-v}$ **歩道**とは，u で始まり v で終わるような G の頂点と辺が交互に現れる有限列のことである。$u=v$ または $u \neq v$ のとき $u-v$ 歩道はそれぞれ**閉じている**または**開いている**という。同じ辺が２度以上現れない $u-v$ 歩道を $\boldsymbol{u-v}$ **小道**といい，同じ頂点が２度以上現れない $u-v$ 歩道を $\boldsymbol{u-v}$ **パス**という。自明でない閉じた小道のことを**回路**という。同じ頂点が２度以上現れない回路のことを**サイクル**という。グラフ G のどの２頂点 u，v についても $u-v$ パスが存在するとき，G は**連結である**という。**木**とはサイクルをもたない連結グラフのことである。u，v を木 T の任意の２頂点とすると，$u-v$ パスは一意に決まる[5)]。

例２：以下の表2.3のようなグラフ H_1 や以下の表2.4のようなグラフ H_2 は木である。また，以下の表2.5のようなグラフ H_3 も木である。しかし，以下の表2.6のようなグラフ H_4 は木ではない。以下の表2.7のような H_4 の部分グラフ H_5 はサイクルとなるからである。ここで，$V(H_3)=V(H_4)=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ とする。(例４終了)

表2.3　例２のグラフ H_1

点番号	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	×	○	○	○
u_2	○	×	×	×
u_3	○	×	×	×
u_4	○	×	×	×
次数	3	1	1	1

表2.4　例２のグラフ H_2

点番号	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	×	○	×	×
u_2	○	×	○	×
u_3	×	○	×	○
u_4	×	×	○	×
次数	1	2	2	1

表2.5　例２のグラフ H_3

点番号	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	×	○	○	○	×	×
u_2	○	×	×	×	○	○
u_3	○	×	×	×	×	×
u_4	○	×	×	×	×	×
u_5	×	○	×	×	×	×
u_6	×	○	×	×	×	×
次数	3	3	1	1	1	1

表2.6　例２のグラフ H_4

点番号	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	×	○	○	○	×	×
u_2	○	×	○	×	○	×
u_3	○	○	×	×	×	○
u_4	○	×	×	×	×	×
u_5	×	○	×	×	×	×
u_6	×	×	○	×	×	×
次数	3	3	3	1	1	1

さらに，本稿での考察のために**「構成可能性」**という用語を以下のように定義する。

「構成可能性」の定義：任意のグラフ G と k 個の連結グラフの集合 H_1, H_2, ..., H_k について，以下の(B1)(B2)が成り立つとき「G は H_1，H_2，....，H_k により**構成可能である**」といい，そうでないとき「**構成可能ではない**」という。

表2.7　グラフ H_5（H_4 の部分グラフ）

点番号	u_1	u_2	u_3
u_1	×	○	○
u_2	○	×	○
u_3	○	○	×
次数	2	2	2

(B1)　G は互いに辺を共有しないように H_1，H_2，....，H_k を含むことができる。

(B2)　G から H_1，H_2，....，H_k の辺を除去し，その結果孤立点となった頂点も除去して得られた部分グラフ H は単純な連結グラフである。

隣接表と同様に，グラフ G が連結な部分グラフ H_1，H_2，....，H_k より構成可能な場合，**構成成分 $\boldsymbol{E[H_1]}$，$\boldsymbol{E[H_2]}$，....，$\boldsymbol{E[H_k]}$，$\boldsymbol{E[H]}$** を以下の手順で作成する。

「構成成分」作成手順-1

```
Step 1：for (i=1；i≦k；i++) E[Hi]=Ø；
Step 2：E[H]=Ø；
Step 3：for (i=1；i<n；i++){
          for (j=i+1；j≦n；i++){
            for (p=1；i≦k；p++){
              if ((vi, vj)∈Hp)E[Hp]=E[Hp]∪{(i, j)}；
            }；
            if ((vi, vj)∈H)E[H]=E[H]∪{(i, j)}；
          }；
        }；
```

例３：G_1 を以下の表2.8のようなグラフとする。このとき，G_1 は上記の表2.3と表2.4の木 H_1，H_2 より構成可能であり，構成成分は

$$E[H_1]=\{(1,\ 2),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5)\}$$
$$E[H_2]=\{(1,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 5)\}$$
$$E[H]=\{(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4)\}$$

である。H_1, H_2 は明らかに連結グラフであり，G_1 から H_1, H_2 の辺を除去し，その結果得られる部分グラフ H は $v_{i+1}=u_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ とすれば $H=H_5$ となり，単純な連結グラフだからである。（例３終了）

例４：G_2 を以下の表2.9のようなグラフとする。このとき，G_2 は上記の表2.3の木 H_1 と下記の表2.10のような木 H_6 より構成可能ではない。理由は以下のとおりである。まず次数の関係で，G_2 の頂点 v_1 は H_6 の頂点 w_1 としなければならない。H_6 を以下の表2.11や2.12のように部分グラフとして含むと，H_1 を部分グラフとして含むことができない（“1”が H_6 の辺であることを表している）。G_2 が H_6，H_1 をともに部分グラフとして含む場合は以下の表

2.13～2.15の3とおりである（“1”が H_6 の辺であり，“2”が H_1 の辺であることを表している）が，いずれの場合も残った辺集合（◯で表現）とそれらに接合している頂点集合からなる部分グラフは連結グラフではない。（例４終了）

表2.8　例３のグラフ G_1

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	×	◯	◯	◯	◯
v_2	◯	×	◯	◯	◯
v_3	◯	◯	×	◯	◯
v_4	◯	◯	◯	×	×
v_5	◯	◯	◯	×	×
次数	4	4	4	3	3

表2.9　例４のグラフ G_2

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	×	◯	◯	◯	◯	◯
v_2	◯	×	◯	◯	×	×
v_3	◯	◯	×	◯	×	×
v_4	◯	◯	◯	×	×	×
v_5	◯	×	×	×	×	◯
v_6	◯	×	×	×	◯	×
次数	5	3	3	3	2	2

表2.10　例４のグラフ H_6

点番号	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
w_1	×	◯	◯	◯	◯
w_2	◯	×	×	×	×
w_3	◯	×	×	×	×
w_4	◯	×	×	×	×
w_5	◯	×	×	×	×
次数	4	1	1	1	1

最後に，極大平面的グラフとそれに関連する定義を述べる。２つのグラフ $G=(V,\ E)$ と $G'=(V',\ E')$ が**同型である**とは，「ある V から V' への１対１写像 f が存在して，V の任意の２頂点 v_i，v_j に対して E の辺 $(v_i,\ v_j)$ が存在することと E' の辺 $(f(v_i),\ f(v_j))$ が存在することが同値である。」が成り立つことである。**平面グラフ**とは，平面上の頂点集合と，それを交差なく結ぶ辺集合からなるグラフのことである。平面グラフと同型のグラフを**平面的グラフ**という。平面的グラフの位数を n，サイズを m とすると $n \geqq 3$ かつ $m \leqq 3n-6$ が成り立つ[5)]。また，平面的グラフ G について，G の隣接していないどのような頂点の組を辺で結んでも平面的グラフでなくなるとき，G を**極大平面的グラフ**という。極大平面的グラフについては $n \geqq 3$ かつ $m=3n-6$ が成り立つ[5)]。

表2.11　例４・H_6 を含むグラフ G_2(1)

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	×	1	1	1	1	◯
v_2	1	×	◯	◯	×	×
v_3	1	◯	×	◯	×	×
v_4	1	◯	◯	×	×	×
v_5	1	×	×	×	×	◯
v_6	◯	×	×	×	◯	×
次数	5	3	3	3	2	2

表2.12　例４・H_6 を含むグラフ G_2(2)

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	×	1	1	1	◯	1
v_2	1	×	◯	◯	×	×
v_3	1	◯	×	◯	×	×
v_4	1	◯	◯	×	×	×
v_5	◯	×	×	×	×	◯
v_6	1	×	×	×	◯	×
次数	5	3	3	3	2	2

表2.13　例４・H_6，H_1 を含むグラフ G_2(1)

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	×	1	1	2	1	1
v_2	1	×	◯	2	×	×
v_3	1	◯	×	2	×	×
v_4	2	2	2	×	×	×
v_5	1	×	×	×	×	◯
v_6	1	×	×	×	◯	×
次数	5	3	3	3	2	2

例５：以下の表2.16のようなグラフ G_3 は極大平面的グラフである。しかし，以下の表2.17のようなグラフ G_4 や表2.18のようなグラフ G_5 は極大平面的グラフグラフではない（そもそも平面的グラフではない[5)]）。（例５終了）

以降の章では n 個の頂点集合 $V=\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$ と $m=3n-6$ 個の辺集合 $E=\{e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_m\}$ からなる極大平面的グラフ G といずれもサイズ $n-2$ の任意の２つの木 T_1，T_2 について，G が T_1，T_2 がより構成可能である場合，その**構成成分の例 $\boldsymbol{E[T_1]}$，$\boldsymbol{E[T_2]}$，$\boldsymbol{E[G'']}$** を以下の『**「構成成分」作成手順-2**』で作成する。ただし，G'' は G から T_1，T_2 の辺除去したグラフからさらに孤立点を除去して作成されたグラフである。

表2.14　例４・H_6，H_1 を含むグラフ $G_2(2)$

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	×	1	2	1	1	1
v_2	1	×	2	◯	×	×
v_3	2	2	×	2	×	×
v_4	1	◯	2	×	×	×
v_5	1	×	×	×	×	◯
v_6	1	×	×	×	◯	×
次数	5	3	3	3	2	2

表2.15　例４・H_6，H_1 を含むグラフ $G_2(3)$

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	×	2	1	1	1	1
v_2	2	×	2	2	×	×
v_3	1	2	×	◯	×	×
v_4	1	2	◯	×	×	×
v_5	1	×	×	×	×	◯
v_6	1	×	×	×	◯	×
次数	5	3	3	3	2	2

表2.16　例５のグラフ G_3

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	×	◯	◯	×	◯	◯
v_2	◯	×	◯	◯	×	◯
v_3	◯	◯	×	◯	◯	×
v_4	×	◯	◯	×	◯	◯
v_5	◯	×	◯	◯	×	◯
v_6	◯	◯	×	◯	◯	×
次数	4	4	4	4	4	4

「構成成分」作成手順-2

Step 1：$E[T_1]=\emptyset$；$E[T_2]=\emptyset$；$E[G'']=\emptyset$；

Step 2：for ($i=1$；$i<n$；$i++$){
　　for ($j=i+1$；$j\leqq n$；$i++$){
　　　if ((v_i, v_j)$\in H_1$)$E[H_1]=E[H_2]\cup\{(i, j)\}$；
　　　if ((v_i, v_j)$\in H_2$)$E[H_2]=E[H_2]\cup\{(i, j)\}$；
　　　if ((v_i, v_j)$\in G''$)$E[G'']=E[G'']\cup\{(i, j)\}$；
　　}；
}；

表2.17　例５のグラフ G_4

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	×	×	×	◯	◯	◯
v_2	×	×	×	◯	◯	◯
v_3	×	×	×	◯	◯	◯
v_4	◯	◯	◯	×	×	×
v_5	◯	◯	◯	×	×	×
v_6	◯	◯	◯	×	×	×
次数	3	3	3	3	3	3

表2.18　例５のグラフ G_5

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	×	◯	◯	◯	◯
v_2	◯	×	◯	◯	◯
v_3	◯	◯	×	◯	◯
v_4	◯	◯	◯	×	◯
v_5	◯	◯	◯	◯	×
次数	4	4	4	4	4

以上の定義より,「問題Ｃ及びＣ'」はそれぞれ以下の「問題 C1及び C2」と書き換えることができる。

問題 C1：$n\geqq3$ を満たす任意の整数 n について，G を頂点の数が n で，辺の数が $m=3n-6$ となるような任意の極大平面的グラフとし，T_1，T_2 を辺の数が $n-2$ であるような２つの任意の木とする。このとき，G は T_1，T_2 より構成可能かどうか。

問題 C2：$n\geqq3$ を満たす任意の整数 n について，T_1，T_2 を辺の数が $n-2$ であるような２つの任意の木とする。このとき，頂点の数が n，辺の数が $m=3n-6$，かつ T_1，T_2 より構成可能であるような極大平面的グラフ G が必ず存在するかどうか。

次章以降では，辺の数が１～５の同型でない木の列挙，頂点の数が３～７の同型でない極大平面的グラフの列挙を行い，その上で上記「問題 C1及び C2」を考察する。

３．同型でない木

本章では，k 本の辺からなる木をすべて列挙する。ただし，k は $1\leqq k\leqq5$ を満たす整数である。なお,「第５章本論の考察」の読み易さを考慮し，敢えて本来のグラフ表現で記述する。

１本の辺からなる木は以下の図3.1のようなグラフ１種類である。また，２本の辺からなる木は以下の図3.2のようなグラフ１種類である。

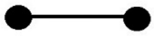

図3.1　１本の辺からなる木

図3.2　２本の辺からなる木

３本の辺からなる木には以下の図3.3，図3.4のような２つの型のグラフが存在する。

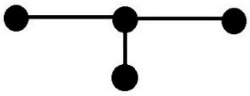

図3.3　３本の辺からなる木（１型）

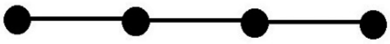

図3.4　３本の辺からなる木（２型）

４本の辺からなる木には以下の図3.5～3.7のような３つの型のグラフが存在する。

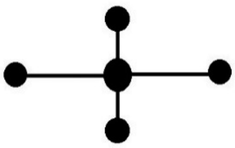

図3.5　４本の辺からなる木（１型）

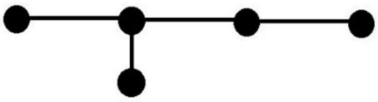

図3.6　４本の辺からなる木（２型）

図3.7　４本の辺からなる木（３型）

５本の辺からなる木には以下の図3.8～3.13のような６つの型のグラフが存在する。

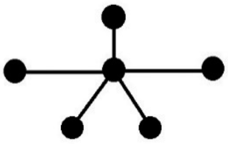

図3.8　５本の辺からなる木（１型）

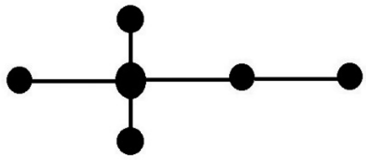

図3.9　５本の辺からなる木（２型）

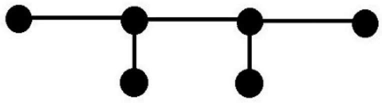

図3.10　５本の辺からなる木（３型）

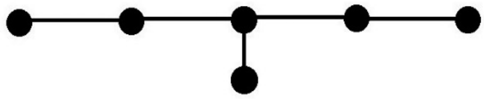

図3.11　５本の辺からなる木（４型）

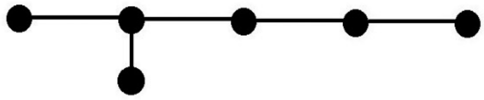

図3.12　５本の辺からなる木（５型）

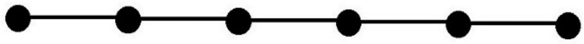

図3.13　５本の辺からなる木（６型）

４．同型でない極大平面的グラフ

本章では，n 個の頂点と $m=3n-6$ 本の辺からなる極大平面的グラフをすべて列挙する。ただし，n は $3 \leqq n \leqq 7$ を満たす整数である。なお,「第５章　本論の考察」の読み易さを考慮し，敢えて本来のグラフ表現で記述する。このとき，各頂点は v_1，v_2，．．．．，v_7 と記述すべきであるが，簡略化してそれぞれ１，２，．．．．，７と記述する。

３個の頂点と３本の辺からなる極大平面的グラフは以下の図4.1のようなグラフ１種類である。

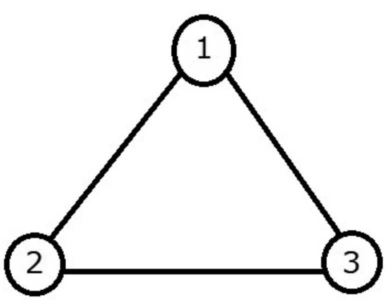

図4.1　３頂点からなる極大平面的グラフ

４個の頂点と６本の辺からなる極大平面的グラフは以下の図4.2のようなグラフ１種類である。

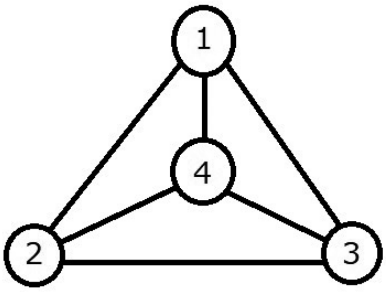

図4.2　４頂点からなる極大平面的グラフ

５個の頂点と９本の辺からなる極大平面的グラフは以下の図4.3のようなグラフ１種類である。

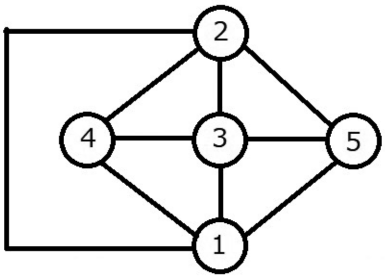

図4.3　５頂点からなる極大平面的グラフ

６個の頂点と12本の辺からなる極大平面的グラフには以下の図4.4，図4.5のような２つの型のグラフが存在する。

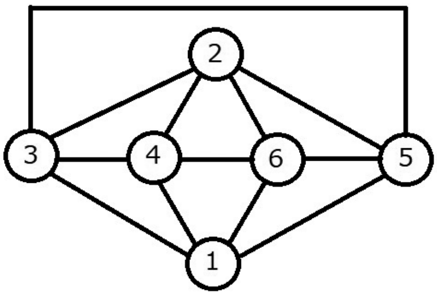

図4.4　６頂点からなる極大平面的グラフ（Ａ型）

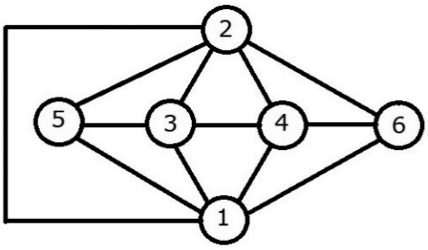

図4.5　６頂点からなる極大平面的グラフ（Ｂ型）

７個の頂点と15本の辺からなる極大平面的グラフには以下の図4.6～4.10のような５つの型のグラフが存在する。

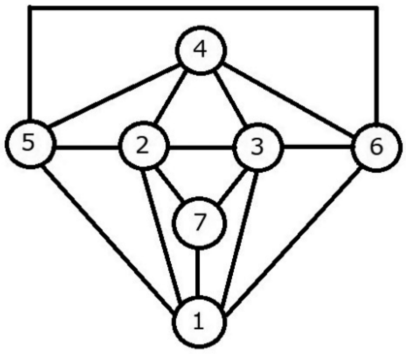

図4.6　７頂点からなる極大平面的グラフ（Ａ型）

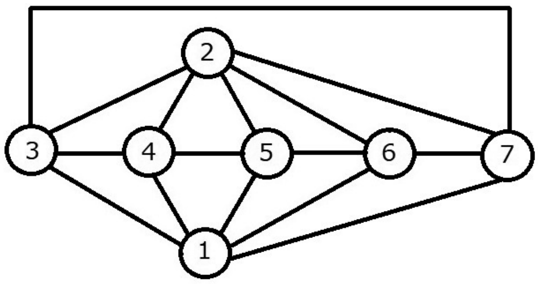

図4.7　７頂点からなる極大平面的グラフ（Ｂ型）

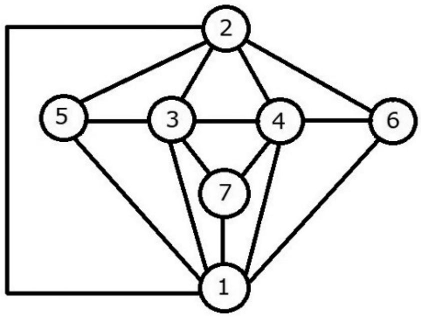

図4.8　７頂点からなる極大平面的グラフ（Ｃ型）

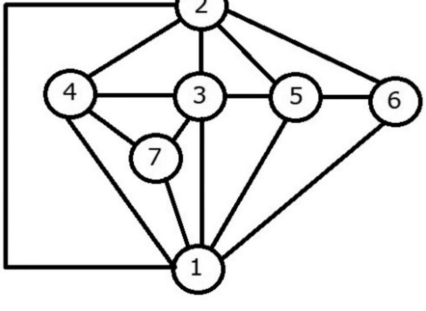

図4.9　７頂点からなる極大平面的グラフ（Ｄ型）

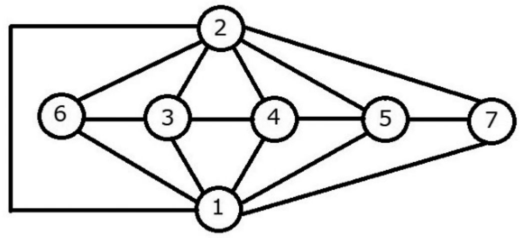

図4.10　７頂点からなる極大平面的グラフ（Ｅ型）

５．本論の考察

本章では，本稿の主題である「問題Ｃ及びＣ'」の考察を行う。まず n が $3 \leqq n \leqq 6$ の場合についてまとめて考察を行い，その後 $n=7$ の場合について，極大平面的グラフの型別，２つの木 T_1，T_2 の型の組合せ別に考察を行う。

5.1　$3 \leqq n \leqq 6$ の場合についての考察

まず $3 \leqq n \leqq 5$ を満たす整数 n について，第１章の表1.1及び表1.2の結果より，n 個の頂点と $m=3n-6$ 本の辺からなる任意の極大平面的グラフ G は $n-2$ 本の辺をもつ任意の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

次に $n=6$ の場合を考察する。同様に第１章の表1.3の結果より，６個の頂点と12本の辺からなるＢ型の極大平面的グラフ G は４本の辺をもつ任意の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。また，表1.3の結果より，T_1，T_2 のどちらか一方のみが１型の木であるか，両方とも１型の木でなければ，６個の頂点と12本の辺からなるＢ型の極大平面的グラフ G は４本の辺からなる２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

最後に，T_1，T_2 がともに1型の木の場合も，構成成分

$$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6)\}$$
$$E[T_2]=\{(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6)\}$$
$$E[G'']=\{(3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6),\ (5,\ 6)\}$$

を得るので，６個の頂点と12本の辺からなるＢ型の極大平面的グラフ G は４本の辺からなるともに１型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

以上の論考より，以下の定理が得られ，「問題Ｃ及びＣ'」の答はともに“Yes”であることが分かった。

定理1.1：$3 \leqq n \leqq 6$ を満たす任意の整数 n について，G を頂点の数が n で，辺の数が $m=3n-6$ となるような任意の極大平面的グラフとし，T_1，T_2 を辺の数が $n-2$ であるような２つの任意の木とする。このとき，G について以下の⑴⑵が成り立つ。

⑴　G は互いに辺を共有しないように T_1，T_2 を含むことができる。

⑵　G から T_1，T_2 の辺を除去し，その結果孤立点となった頂点も除去して得られた部分グラフ H は $n-2$ 本の辺からなる単純な連結グラフである。

定理1.2：$3 \leqq n \leqq 6$ を満たす任意の整数 n について，T_1，T_2 を辺の数が $n-2$ であるような2つの任意の木とする。このとき，頂点の数が n，辺の数が $m=3n-6$，かつ以下の⑶⑷が成り立つような極大平面的グラフ G が必ず存在する。

⑶　G は互いに辺を共有しないように T_1，T_2 を含むことができる。

⑷　G から T_1，T_2 の辺を除去し，その結果孤立点となった頂点も除去して得られた部分グラフ H は $n-2$ 本の辺からなる単純な連結グラフである。

以降の節で $n=7$ についての考察を行う。

5.2　２つの木 T_1，T_2 の型の組合せ

T_1，T_2 は５本の辺からなる木であるが，そのような木は第３章の図3.8～3.13の６つの型がある。本節では，T_1，T_2 として採り得るすべての組合せを以下の表5.1に列挙する。

表5.1　T_1，T_2 として採り得る組合せ

ケース No	木の型番号		ケース No	木の型番号	
	T_1	T_2		T_1	T_2
1	1	1	12	3	3
2	1	2	13	3	4
3	1	3	14	3	5
4	1	4	15	3	6
5	1	5	16	4	4
6	1	6	17	4	5
7	2	2	18	4	6
8	2	3	19	5	5
9	2	4	20	5	6
10	2	5	21	6	6
11	2	6	——	——	——

5.3　Ａ型の極大平面的グラフに関する考察

７個の頂点と15本の辺からなるＡ型の極大平面的グラフについて，上記表5.1のすべてケースを考察する。

上記表5.1のケース No.1について考察：上記図4.6より，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G の最大次数である次数５の３つの頂点 v_1，v_2，v_3 は互いに隣接しているので，G はともに１型である図3.8のような木 T_1，T_2 を同時に含むことはできない。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに１型の２つの木 T_1，T_2 から構成可能ではない。

上記表5.1のケース No.2について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 4),\ (2,\ 7),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (3,\ 7),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と２型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.3について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 7),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と３型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.4について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (3,\ 7),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(2,\ 4),\ (2,\ 7),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と４型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.5について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (3,\ 7),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.6について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 5),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (3,\ 7),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.7について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 2),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (3,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 4),\ (2,\ 7),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに２型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.8について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (3,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (2,\ 4),\ (2,\ 7),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と３型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.9について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (3,\ 7),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と４型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.10について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 2),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (3,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.11について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 4)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 5),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (3,\ 7),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.12について考察：

$E[T_1]=\{(2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (2,\ 7),\ (3,\ 4),\ (3,\ 6)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 2),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (4,\ 6),\ (5,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 7),\ (4,\ 5)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに３型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.13について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 7),\ (3,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる３型の木 T_1 と４型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.14について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 7),\ (3,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる３型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.15について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 7),\ (3,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる３型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.16について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (3,\ 7),\ (4,\ 5)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに４型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.17について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (3,\ 7),\ (4,\ 5)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 2),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 6),\ (5,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 7),\ (3,\ 4)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる４型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.18について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (3,\ 7),\ (4,\ 5)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる４型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.19について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 7),\ (2,\ 7),\ (3,\ 7),\ (5,\ 6)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 3),\ (1,\ 6),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに５型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.20について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (3,\ 4),\ (3,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 7),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる５型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.21について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (3,\ 4),\ (3,\ 7),\ (4,\ 5)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＡ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに６型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

以上の論考より，「問題Ｃ」の答はこの時点で早くも“No”であることが分かった。以降の節では，「問題Ｃ’」の答が“Yes”かどうかを確かめるために考察を続けていくことにする。(「上記表5.1のケース No.1がＢ型の極大平面的グラフが構成可能ならば，「問題Ｃ’」の答は“Yes”である。)

5.4　Ｂ型の極大平面的グラフに関する考察

７個の頂点と15本の辺からなるＢ型の極大平面的グラフについて，上記表5.1のすべてケースを考察する。

上記表5.1のケース No.1について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7)\}$

$E[G'']=\{(3,\ 4),\ (3,\ 7),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに１型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.2について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7),\ (3,\ 4)\}$

$E[G'']=\{(2,\ 3),\ (3,\ 7),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と２型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.3について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (3,\ 7)\}$

$E[G'']=\{(2,\ 4),\ (2,\ 7),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と３型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.4について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 7)\}$

$E[G'']=\{(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7),\ (3,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と４型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.5について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 7)\}$

$E[G'']=\{(2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7),\ (3,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.6について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 7),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 7)\}$

$E[G'']=\{(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (3,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.7について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 3)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7),\ (3,\ 4)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 4),\ (3,\ 7),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 7)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに２型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.8について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (4,\ 5)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (3,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (2,\ 7),\ (5,\ 6),\ (6,\ 7)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と３型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.9について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 4)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7),\ (3,\ 7)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と４型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.10について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 5)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7),\ (3,\ 7)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.11について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 5)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 7),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.12について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 4),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 4),\ (4,\ 5)\}$
$E[T_2]=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 5),\ (2,\ 7),\ (3,\ 7),\ (5,\ 6),\ (6,\ 7)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに３型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.13について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 4),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 4),\ (4,\ 5)\}$
$E[T_2]=\{(1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 3),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7),\ (3,\ 4),\ (3,\ 7)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる３型の木 T_1 と４型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.14について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 5),\ (4,\ 5)\}$
$E[T_2]=\{(1,\ 4),\ (2,\ 4),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (5,\ 6)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 7),\ (3,\ 7),\ (6,\ 7)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる３型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.15について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 5),\ (4,\ 5)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 3),\ (2,\ 7),\ (3,\ 4),\ (5,\ 6),\ (6,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 4),\ (2,\ 6),\ (3,\ 7)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる３型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.16について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 7),\ (2,\ 4),\ (6,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 3),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7),\ (3,\ 4),\ (3,\ 7)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに４型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.17について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (3,\ 7),\ (4,\ 5)\}$
$E[T_2]=\{(1,\ 4),\ (2,\ 4),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (6,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 7),\ (5,\ 6)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる４型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.18について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 6),\ (4,\ 5)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 3),\ (2,\ 7),\ (3,\ 4),\ (5,\ 6),\ (6,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 7)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる４型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.19について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 7),\ (2,\ 7),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6)\}$
$E[T_2]=\{(1,\ 4),\ (2,\ 4),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (6,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 3),\ (1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 7)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに５型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.20について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 4),\ (2,\ 6)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 3),\ (2,\ 7),\ (3,\ 4),\ (5,\ 6),\ (6,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 7),\ (4,\ 5)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる５型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.21について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 7),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (3,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 3),\ (2,\ 7),\ (3,\ 4),\ (5,\ 6),\ (6,\ 7)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 6),\ (2,\ 4),\ (4,\ 5)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに６型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

以上の論考より，「問題Ｃ’」の答はこの時点で“Yes”であることが分かった。以降の節では，構成可能なバリエーションをできるだけ増やすために，考察を続けていくことにする。

5.5　Ｃ型の極大平面的グラフに関する考察

７個の頂点と15本の辺からなるＣ型の極大平面的グラフについて，上記表5.1のすべてケースを考察する。

上記表5.1のケース No.1について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6)\}$
$E[G'']=\{(3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 7),\ (4,\ 6),\ (4,\ 7)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに１型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.2について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 4),\ (3,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6),\ (4,\ 7)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と２型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.3について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 6),\ (4,\ 6)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 4),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (4,\ 7)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と３型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.4について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6),\ (4,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 7)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と４型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.5について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 7),\ (4,\ 6)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (4,\ 7)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.6について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (3,\ 7),\ (4,\ 6),\ (4,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.7について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (4,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (3,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 4),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに２型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.8について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 4),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 6),\ (4,\ 6)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 7)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と３型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.9について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (3,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6),\ (4,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と４型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.10について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (4,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 7),\ (4,\ 6)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.11について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 3)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (3,\ 7),\ (4,\ 6),\ (4,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.12について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 6),\ (4,\ 6)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 7)\}$
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに３型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.13について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (3,\ 7),\ (4,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 4),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる３型の木 T_1 と４型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.14について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (3,\ 7),\ (4,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 3),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる３型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.15について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (3,\ 7),\ (4,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる３型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.16について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 5),\ (4,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 4),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに４型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.17について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 5),\ (4,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 3),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる４型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.18について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 5),\ (4,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (3,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる４型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.19について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 7),\ (2,\ 5),\ (3,\ 7),\ (4,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 3),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 4),\ (1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに５型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.20について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 4),\ (4,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (3,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる５型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.21について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (4,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＣ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに６型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

5.6　Ｄ型の極大平面的グラフに関する考察

７個の頂点と15本の辺からなるＤ型の極大平面的グラフについて，上記表5.1のすべてケースを考察する。

上記表5.1のケース No.1について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 7),\ (4,\ 7),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに１型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.2について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (4,\ 7)\}$

$E[G'']=\{(2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 7),\ (5,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と２型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.3について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 4),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 6),\ (5,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (4,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と３型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.4について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (5,\ 6)\}$

$E[G'']=\{(2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (3,\ 7),\ (4,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と４型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.5について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$

$E[T_2]$={(2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 7), (5, 6)}
$E[G'']$={(1, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 6), (3, 7)}
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.6について考察：

$E[T_1]$={(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7)}
$E[T_2]$={(2, 6), (3, 4), (3, 5), (4, 7), (5, 6)}
$E[G'']$={(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 7)}
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.7について考察：

$E[T_1]$={(1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 7)}
$E[T_2]$={(2, 3), (2, 4), (3, 5), (2, 6), (4, 7)}
$E[G'']$={(1, 2), (1, 3), (3, 4), (3, 5), (5, 6)}
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに２型の２つの木 T_1, T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.8について考察：

$E[T_1]$={(1, 3), (2, 3), (3, 5), (3, 7), (4, 7)}
$E[T_2]$={(1, 4), (1, 6), (1, 7), (2, 6), (5, 6)}
$E[G'']$={(1, 2), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4)}
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と３型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.9について考察：

$E[T_1]$={(1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 7)}
$E[T_2]$={(2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 7), (5, 6)}
$E[G'']$={(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)}
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と４型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.10について考察：

$E[T_1]$={(1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 7)}
$E[T_2]$={(2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 7), (5, 6)}
$E[G'']$={(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 5), (2, 6)}
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.11について考察：

$E[T_1]$={(1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 7)}
$E[T_2]$={(2, 6), (3, 4), (3, 5), (4, 7), (5, 6)}
$E[G'']$={(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (2, 5)}
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.12について考察：

$E[T_1]$={(1, 7), (2, 3), (3, 5), (3, 7), (4, 7)}
$E[T_2]$={(1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 6), (5, 6)}
$E[G'']$={(1, 2), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4)}
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに３型の２つの木 T_1, T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.13について考察：

$E[T_1]$={(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 7), (4, 7)}
$E[T_2]$={(1, 4), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (5, 6)}
$E[G'']$={(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)}
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる３型の木 T_1 と４型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.14について考察：

$E[T_1]$={(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 7), (4, 7)}
$E[T_2]$={(1, 4), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (5, 6)}
$E[G'']$={(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 5), (2, 6)}
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる３型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.15について考察：

$E[T_1]$={(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 7), (4, 7)}
$E[T_2]$={(1, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (5, 6)}
$E[G'']$={(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (2, 5)}
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる３型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.16について考察：

$E[T_1]$={(1, 6), (1, 7), (2, 4), (3, 7), (4, 7)}
$E[T_2]$={(1, 4), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (5, 6)}
$E[G'']$={(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 5), (2, 6)}
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに４型の２つの木 T_1, T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.17について考察：

$E[T_1]$={(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (3, 7)}
$E[T_2]$={(2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 7), (5, 6)}
$E[G'']$={(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 6)}
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる４型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.18について考察：

$E[T_1]$={(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (3, 7)}
$E[T_2]$={(1, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (5, 6)}
$E[G'']$={(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 7)}
を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる４型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.19について考察：

$E[T_1]$={(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 3), (3, 7)}

$E[T_2]=\{(2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 7),\ (5,\ 6)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに５型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.20について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5)\}$
$E[T_2]=\{(1,\ 4),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (5,\ 6)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 7),\ (4,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる５型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.21について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 7),\ (5,\ 6)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (2,\ 5)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＤ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに６型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

5.7　Ｅ型の極大平面的グラフに関する考察

７個の頂点と15本の辺からなるＥ型の極大平面的グラフについて，上記表5.1のすべてケースを考察する。

上記表5.1のケース No.1について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに１型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.2について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と２型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.3について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (5,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(2,\ 4),\ (2,\ 7),\ (3,\ 4),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と３型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.4について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と４型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.5について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.6について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 7),\ (3,\ 4),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる１型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.7について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (5,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 7),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに２型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.8について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 7)\}$
$E[T_2]=\{(1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (5,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と３型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.9について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (2,\ 3)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と４型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.10について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 7),\ (2,\ 4)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.11について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 7),\ (2,\ 4)\}$
$E[T_2]=\{(2,\ 7),\ (3,\ 4),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 7)\}$
$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる２型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.12について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 7),\ (3,\ 4),\ (3,\ 6)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (5,\ 7)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 4),\ (1,\ 6),\ (2,\ 4),\ (2,\ 7),\ (4,\ 5)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに３型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.13について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (1,\ 7),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 4),\ (2,\ 4),\ (2,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 7)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる３型の木 T_1 と４型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.14について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 7),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 6),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7),\ (5,\ 7)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる３型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.15について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 7),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 6),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 7)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる３型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.16について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (1,\ 7),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 4),\ (2,\ 4),\ (2,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 7)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに４型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.17について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 7),\ (2,\ 7),\ (3,\ 4)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (5,\ 7)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 6),\ (2,\ 4),\ (2,\ 6),\ (4,\ 5)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる４型の木 T_1 と５型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.18について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 7),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 6),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 7)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる４型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.19について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 4),\ (1,\ 7),\ (2,\ 7),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5)\}$

$E[T_2]=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (5,\ 7)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (2,\ 4),\ (2,\ 6)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに５型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.20について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 7),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 6),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 7)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 6),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなる５型の木 T_1 と６型の木 T_2 より構成可能である。

上記表5.1のケース No.21について考察：

$E[T_1]=\{(1,\ 4),\ (1,\ 7),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (2,\ 5)\}$

$E[T_2]=\{(2,\ 6),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 7)\}$

$E[G'']=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (2,\ 4)\}$

を構成成分として得ることができる。よって，７頂点からなるＥ型の極大平面的グラフ G は５本の辺からなるともに６型の２つの木 T_1，T_2 より構成可能である。

5.8　$n=7$ の場合の考察に関する結論

上記の5.3～5.7節の論考より，以下の定理が得られ，「問題Ｃ」の答は“No”であり，「問題Ｃ’」の答は“Yes” であることが分かった。

定理2.1： $n=7$ について，G を頂点の数が n で，辺の数が $m=3n-6$ となるような任意の極大平面的グラフとし，T_1，T_2 を辺の数が $n-2$ であるような２つの任意の木とする。このとき，G について，T_1，T_2 がともに１型のときは以下の⑴が成り立ち，それ以外のときは以下の⑵⑶が成り立つ。

⑴　G は互いに辺を共有しないように T_1，T_2 を含むことはできない。

⑵　G は互いに辺を共有しないように T_1，T_2 を含むことができる。

⑶　G から T_1，T_2 の辺を除去し，その結果孤立点となった頂点も除去して得られた部分グラフ H は $n-2$ 本の辺からなる単純な連結グラフである。

定理2.2： $n=7$ について，T_1，T_2 を辺の数が $n-2$ であるような２つの任意の木とする。このとき，頂点の数が n，辺の数が $m=3n-6$，かつ以下の⑷⑸が成り立つような極大平面的グラフ G が必ず存在する。

⑶　G は互いに辺を共有しないように T_1，T_2 を含むこと

ができる。

(4)　G から T_1，T_2 の辺を除去し，その結果孤立点となった頂点も除去して得られた部分グラフ H は $n-2$ 本の辺からなる単純な連結グラフである。

６．結論

筆者は以前『同じサイズの３つの木が極大平面的グラフにパッキング可能かどうかという問題』を以下の「問題Ａ」として提起・考察し，否定的な答が得られた[36]。

問題Ａ：$n \geqq 3$ を満たす任意の整数 n について，G を頂点の数が n で，辺の数が $m=3n-6$ となるような任意の極大平面的グラフとする。このとき，辺の数がすべて $n-2$ であるような３つの任意の木 T_1，T_2，T_3 は G にパッキング可能であるかどうか。

また，上記「問題Ａ」の考察により，以下のような「問題A'」に対しても否定的な答が得られることが分かった。

問題Ａ'：$n \geqq 3$ を満たす任意の整数 n について，T_1，T_2，T_3 を辺の数が $n-2$ となるような３つの任意の木とする。このとき，頂点の数が n，辺の数が $m=3n-6$，かつ T_1，T_2，T_3 がパッキング可能であるような極大平面的グラフ G が必ず存在するかどうか。

そこで，本稿では「問題Ａ及びA'」の条件を緩和した以下の２つの問題について考察した。

問題Ｃ：$n \geqq 3$ を満たす任意の整数 n について，G を頂点の数が n で，辺の数が $m=3n-6$ となるような任意の極大平面的グラフとし，T_1，T_2 を辺の数が $n-2$ であるような２つの任意の木とする。このとき，G について以下の(1)(2)が成り立つかどうか。（成り立つとき，「G は T_1，T_2 より**構成可能**である」という。）

(1)　G は互いに辺を共有しないように T_1，T_2 を含むことができる。

(2)　G から T_1，T_2 の辺を除去し，その結果孤立点となった頂点も除去して得られた部分グラフ H は $n-2$ 本の辺からなる単純な連結グラフである。

問題Ｃ'：$n \geqq 3$ を満たす任意の整数 n について，T_1，T_2 を辺の数が $n-2$ であるような２つの任意の木とする。このとき，頂点の数が n，辺の数が $m=3n-6$，かつ以下の(3)(4)が成り立つ（つまり，「G は T_1，T_2 より**構成可能**である」）ような極大平面的グラフ G が必ず存在するかどうか。

(3)　G は互いに辺を共有しないように T_1，T_2 を含むことができる。

(4)　G から T_1，T_2 の辺を除去し，その結果孤立点となった頂点も除去して得られた部分グラフ H は $n-2$ 本の辺からなる単純な連結グラフである。

考察の結果は以下の表6.1〜6.4のとおりである（◯が可，×が否）。

表6.1　n 頂点からなる極大平面的グラフグラフの構成可能性の可否（$n=3$，4）

n の値	構成可能性の可否
3	◯
4	◯

表6.2　５頂点からなる極大平面的グラフグラフの構成可能性の可否

木の型		構成可能性の可否
T_1	T_2	
1	1	◯
1	2	◯
2	2	◯

表6.3　６頂点からなる極大平面的グラフの構成可能性の可否

木の型		構成可能性の可否 極大平面的グラフの型	
T_1	T_2	A	B
1	1	◯	◯
1	2	◯	◯
1	3	◯	◯
2	2	◯	◯
2	3	◯	◯
3	3	◯	◯

考察の結果，以下の定理が得られ，「問題Ｃ」の答は“No”であり，「問題Ｃ'」の答は“Yes”であることが分かった。

本稿の主要定理１：$3 \leqq n \leqq 7$ を満たす任意の整数 n について，G を頂点の数が n で，辺の数が $m=3n-6$ となるような任意の極大平面的グラフとし，T_1，T_2 を辺の数が $n-2$ であるような２つの任意の木とする。このとき，G について，$n=7$ で，T_1，T_2 がともに１型のときは以下の(1)が成り立ち，それ以外のときは以下の(2)(3)が成り立つ。

(1)　G は互いに辺を共有しないように T_1，T_2 を含むことはできない。

(2)　G は互いに辺を共有しないように T_1，T_2 を含むことができる。

(3)　G から T_1，T_2 の辺を除去し，その結果孤立点となっ

た頂点も除去して得られた部分グラフ H は $n-2$ 本の辺からなる単純な連結グラフである。

表6.4　７頂点からなる極大平面的グラフの構成可能性の可否

木の型		構成可能性の可否				
		極大平面的グラフの型				
T_1	T_2	A	B	C	D	E
1	1	×	○	○	○	○
1	2	○	○	○	○	○
1	3	○	○	○	○	○
1	4	○	○	○	○	○
1	5	○	○	○	○	○
1	6	○	○	○	○	○
2	2	○	○	○	○	○
2	3	○	○	○	○	○
2	4	○	○	○	○	○
2	5	○	○	○	○	○
2	6	○	○	○	○	○
3	3	○	○	○	○	○
3	4	○	○	○	○	○
3	5	○	○	○	○	○
3	6	○	○	○	○	○
4	4	○	○	○	○	○
4	5	○	○	○	○	○
4	6	○	○	○	○	○
5	5	○	○	○	○	○
5	6	○	○	○	○	○
6	6	○	○	○	○	○

本稿の主要定理２：$3 \leqq n \leqq 7$ を満たす任意の整数 n について，T_1，T_2 を辺の数が $n-2$ であるような２つの任意の木とする。このとき，頂点の数が n，辺の数が $m=3n-6$，かつ以下の⑷⑸が成り立つような極大平面的グラフ G が必ず存在する。

⑷　G は互いに辺を共有しないように T_1，T_2 を含むことができる。

⑸　G から T_1，T_2 の辺を除去し，その結果孤立点となった頂点も除去して得られた部分グラフ H は $n-2$ 本の辺からなる単純な連結グラフである。

今後の課題は以下のとおりである。まず，以下の予想が正しいと仮定する。

予想Ａ：$n \geqq 3$ を満たす任意の整数 n について，「問題C’」の答は必ず“Yes”である。

$n \geqq 3$ を満たす任意の整数 n について，n 個の頂点と $m=3n-6$ 本の辺からなる同型でない極大平面的グラフの数を N，$n-2$ 本の辺からなる同型でない木の数を M，構成可能性を考察すべき場合の数を $L[n]$ とすると

$$L[n]=N \cdot M \cdot (M+1)/2$$

となり，n が増加すると $L[n]$ は爆発的に大きくなっていくことが十分予測できる。$L[7]=105$ の場合でさえ考察にこれだけのページ数を割かねばならない（本稿の後半の約９ページ）。従って，n が大きくなっていったときの「問題C’」の考察方法を検討することは今後の課題である。

一方で，もし上記の「予想Ａ」が間違っていて，n がある値になったときに「問題C’」の答が“No”となると仮定する。その場合，離散数学教育の教材とするために，n を大きくしていっても「問題Ｃ及びC’」を本稿の第5章5.3〜5.7節と同様の考察方法を続けることとする。その結果をどのような形で蓄積していくかを検討することも今後の課題である。

参考文献

1）V. J. Abhyanker, *Directed methods of gracefully labeling graphs*, Ph. D. Thesis, University of Mumbai (2002).

2）R. E. L. Alfred and B. D. Mckay, *Graceful and harmonious labeling of trees*, Bull. Inst. Appl. 23 (1998), pp.69-72.

3）I. Anderson, *Perfect matching of a graph*, Journal of Combinatorial Theory, vol.10B, pp.183-186, 1971.

4）M. Bahl, S. Lake and A. Wertheim, *Gracefulness of families of spiders*, http://fac-staff.unca.edu/pbahls/paper/Spiders.pdf.

5）M. Behzard, G. Chartrand and L. L. Foster, “Graphs and Digraphs,” Prindle, Weber and Schmidt, 1979.

6）J. C. Bermond, *Graceful graphs, radio antennae and French windmills*, Graph Theory and Combinatorics, Pitman, London (1979), pp.18-37.

7）J. C. Bermond and D. Sotteau, *Graph decompositions and G-design*, Proc. 5th British Combin. Conf. (1975), Congr. Numer., XV (1976), pp.53-72.

8）V. Bhat-Nayak and D. Deshmukh, *New families of graceful banana trees*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 106 (1996), pp.187-190.

9）B. Bollobás, *Some remarks on packing trees*, Discrete Math., vol.46, pp.203-204, 1983.

10）W. C. Chen, H. I. Lu and Y. N. Yeh, *Operations of interlaced trees and graceful trees*, Southeast Asian Bull., 21 (1994), pp.15-18.

11）F. R. K. Chung and F. K. Hwang, *Rotatable graceful graphs*, Ars Combin., 11 (1981), pp.239-250.

12）E. Dobson, *Packing trees into the complete graph*, Combinatorics, Probability and Computing, vol. 11, issue. 3 (May), pp.263-272, 2002.

13）M. Edwards and L. Howard, *A survey of graceful trees*, Atlantic Electronic Journal of Mathematics, vol. 1, no. 1 (2006).

14）W. Fang, *A computational approach to the graceful tree conjecture*, arXiv: 1003.3045vl [cs.DM].

15）J.F.Fink and H.J.Straight, *A note on path-perfect graphs*, Discrete Mathematical Monthly 1, vol.33, pp.95-98, 1981.

16）P. C. Fishbum, *Packing graphs with odd and even trees*, Journal of Graph Theory, vol.7, Issue 3 (October), pp.369-383, 2006.

17）J. Gallian, *A dynamic survey of graph labeling*, The Electronic Journal of Mathematics, 18 (2011), pp.1-256, http: //www. combinatorics. org/, ftp: //ftp. gwdg. de/pub/EMIS/journals/EJC/Surveys/ds6.pdf.

18）A.Gyárfás and J.Lehel, *Packing trees of different order into K_n*, Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely), vol.18 of Colloq. Math. Soc. J. Bol., North-Holland, pp.463-469, 1978.

19）M. Horton, *Graceful trees: Statistics and Algorithms*, (2003), University of Tasmania, http://eprint.utas.edu.au/19/1/GracefulTreesStatisticsAndAlgorithms.pdf.

20）P. Hrnčiar and A. Haviar, *All trees of diameter five are graceful*, Discrete Math., 233 (2001), pp.133-150.

21）A. Kotzig, *On certain vertex-valuations of finite graphs*, Utilitas Math., 4 (1973), pp.261-290.

22）D. Mishra and P. Panigrahi, *Graceful lobsters obtained by component moving of diameter four trees*, Computers and Mathematics with Applications, 50 (August 2005), pp.367-380.

23）D. Mishra and P. Panigrahi, *Some graceful lobsters with all three types of branches incident on the vertices of the central path*, Computers and Mathematics with Applications, 56 (2008), pp.1382-1394.

24）D. Morgan, *All lobsters with perfect matchings are graceful*, Technical Report, University of Alberta, TR05-01, Jan 2005, http: //www. cs. ualberta. ca/research/techreports/2005.php.

25）H. K. Ng, *Gracefulness of a class of lobsters*, Notices AMS 7 (1986), abstract no. 825-05-294.

26）J.Petersen, *Die Theorie der regulären Graphs*, Acta Math. vol.15, pp.193-220, 1891.

27）G. Ringel, *Problem 25*, Theory of graphs and its applications. Proc. Symposium Smolenice (1963), Academia (1964), p.162.

28）A. Rosa, *On certain valuations of the vertices of a graph*, Theory of Graphs (Proc. International Symposium, Rome, 1966), Gordon and Breach, N. Y. and Dunod Paris (1967), pp. 349-355.

29）A. Rosa, *Labeling Snakes*, ARS Combinatoria, 3 (1977), pp. 67-74.

30）G. Sethuraman and J. Heesintha, *A new class of graceful Lobsters*, J. Combin. Math. Combin. Computing, 67 (2008), pp.99-109.

31）A. Taraz, *On the tree-packing conjecture of Gyarfas and Lehel*, https://www.math.tugraz.at/mathb/seminar/20121113-taraz.pdf (2012).

32）W.T.Tutte, *A short proof of the factor theorem for finite graphs*, Canadian Journal of Mathematics, vol.6, pp.347-352, 1954.

33）J. G. Wang, D. J. Jin, X. G. Lu and D. Zhang, *The gracefulness of a class of lobster trees*, Math. Comput. Modeling, 20 (1994), pp.105-110.

34）Zaks and Liu, *Decomposition of graphs into trees*, Proceedings of the Eighth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing. Utilitas Math., Winnipeg, pp.643-654, 1977.

35）S. L. Zhao, *All trees of diameter four are graceful*, Annals New York Academy of Sciences (1986), pp.700-706.

36）高橋昌也，「論理的思考力を養うための離散数学教材の開発―グラフ理論のパッキング問題の考察を通して―」，福岡工業大学研究論集，第51巻第１号（2018），pp. 55-69．