確率微分方程式の逐次近似解の収束条件に関する考察

川　畑　茂　徳（電子情報工学科）

On the successive approximation of solutions of stochastic differential equations

Shigetoku KAWABATA (Department of Information Electronics)

Abstract

We consider the problem of successive approximation for solutions of stochastic differential equations. It is well known that in Ito's classical theory of stochastic differential equations with Lipschitz continuous coefficients, the successive approximation method plays an essential role in the construction of solutions as well as in the uniqueness problem.

We show that conditions which guarantee pathwise uniqueness of solutions also imply the convergence of successive approximations to the solutions in quadratic mean. The proof is due to a result from the theory of ordinary differential equations.

To ensure the pathwise uniquness of the solutions we need to impose the conditions on the variation of the function $\sigma(t, x)$ relative to (t, x).

Keywords: *stochastic differential equations, pathwise uniqueness, successive approximation*

1　序論

確率微分方程式の道ごとの一意的な解を逐次近似法で構成する問題を考える。確率微分方程式の強い解の一意的存在のよく知られた十分条件は Lipschitz 条件である。このことは伊藤[1]によって逐次近似の方法で直接にしめされ，それは一つの標準議論となっている。連続係数の確率微分方程式の解の存在は Skorohod[6]によって保証されているので，道ごとの一意性を示せば，強い解の一意的存在が分かる。Osgood 条件を満たす場合には山田[4]によって示された。我々は異なった観点から常微分方程式に対する手法を利用し，道ごとの一意性を保証しかつ逐次近似解が真の解に $\mathbf{L}^2$ 収束する条件を求めてきた[2),3]。常微分方程式では逐次近似解は収束するが一意性が成り立たない例，逐次近似解は収束しないが一意性が成り立つ例がある。一方，確率微分方程式では，道ごとの一意性を保証する条件のもとで逐次近似解が $\mathbf{L}^2$ 収束しない例はまだ発見されていない。

方程式

$$x(t)=\xi+\int_0^t \sigma(s,\ x(s))dB(s) \tag{1}$$

の係数 $\sigma(t, x)$ が (t, x) の連続関数で

(1)　すべての $(t, x, y)\in(0, T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ に対し

$$|\sigma(t,\ x)-\sigma(t,\ y)|\leq\frac{|x-y|}{t^{\frac{1}{2}}}$$

(2)　すべての $(t, x)\in[0, T]\times\mathbf{R}$ に対し

$$|\sigma(t,\ x)|\leq M$$

を満たすとき

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|x_k(t)-x(t)|^2\right]=0 \tag{2}$$

が成り立つことを示した[3]。上の条件で $t^{\frac{1}{2}}$ を t で置き換えたとき，逐次近似解が $\mathbf{L}^2$ 収束する条件を Rogers の論文[5]を参考に以下の節で考察する。

2　問題の定式化

いま $\sigma:[0, \infty)\times\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ とする。与えられた σ に対し方程式

$$dx(t)=\sigma(t,\ x(t))dB(t) \tag{3}$$

を考える。係数 σ に次の条件をおく。

(A)　$\sigma(t, x)$ は $[0, \infty)\times\mathbf{R}$ 上で連続

(B)　正定数 K が存在し

$$|\sigma(t,\ x)|^2\leq K(1+|x|^2) \tag{4}$$

が成り立つ

平成23年５月30日受付

(C)　すべての $(t,\ x,\ y)\in(0,\ T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ に対し

$$|\sigma(t,\ x)-\sigma(t,\ y)|\leq\frac{|x-y|}{t} \tag{5}$$

(D)　$|\sigma(t,\ x)|^2=o(e^{-1/t}t^{-2})$，as $t\to 0$

以下では $T>1$ を与えて区間 $[0,\ T]$ 上で考察する。方程式(3)の逐次近似解を次のように定義する

$$x_{k+1}(t)=\xi+\int_0^t\sigma(s,\ x_k(s))dB(s) \tag{6}$$

$$x_k(0)=\xi \tag{7}$$

定理を述べるためにはいくつかの準備が必要である。

2.1　準備

補題2.1　$p\geq 1$ とする。係数 σ が条件(B)を満たすとする。ある正定数 $K(p,\ T)$ が存在し

$$\mathbf{E}[|x(t)|^{2p}]\leq K(p,T)(1+\mathbf{E}[|\xi|^{2p}])\quad(t\in[0,\ T]) \tag{8}$$

$$\mathbf{E}[|x_k(t)|^{2p}]\leq K(p,T)(1+\mathbf{E}[|\xi|^{2p}])\quad(t\in[0,\ T]) \tag{9}$$

が成り立つ。

補題2.2　係数 σ が条件(B)を満たすとする。正定数 C_1（以下，単に定数というときは，T，K，$K(p,\ T)$，$\mathbf{E}|\xi|^2]$ のみに依存する数）が存在し

$$\mathbf{E}[|x_k(t)-x(t)|^2]\leq C_1t \tag{10}$$

$$\mathbf{E}[|x(t)-\tilde{x}(t)|^2]\leq C_1t \tag{11}$$

が成り立つ。ここで $x(t)$ と $\tilde{x}(t)$ は(3)の解である。

証明

(10)，(11)は本質的に同じであるから(10)のみ示す。

$$x_k(t)-x(t)=\int_0^t(\sigma(s,\ x_{k-1}(s))-\sigma(s,\ x(s)))dB(s)$$

より

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[|x_k(t)-x(t)|^2\\
&=\mathbf{E}\left|\int_0^t(\sigma(s,\ x_{k-1}(s))-\sigma(s,\ x(s)))dB(s)\right|^2\\
&=\int_0^t\mathbf{E}[|\sigma(s,\ x_{k-1}(s))-\sigma(s,\ x(s))|^2]ds\\
&\leq 2\int_0^t\mathbf{E}[|\sigma(s,\ x_{k-1}(s)|^2]ds+2\int_0^t\mathbf{E}[|\sigma(s,\ x(s)|^2]ds\\
&\leq 2\int_0^t\mathbf{E}[K(1+|x_{k-1}(s)|^2)]ds\\
&\quad+2\int_0^t\mathbf{E}[K(1+|x(s)|^2)]ds\\
&\leq C_1t
\end{aligned}$$

ここで補題2.1を用いた。

いま $\Lambda_k(t)=\|x_k(t)-x(t)\|_2$ とおいて $\Lambda(t)$ と $\lambda(t)$ を

$$\Lambda(t)=\limsup_{k\to\infty}\Lambda_k(t)$$

$$\lambda(t)=\limsup_{k\to\infty}\mathbf{E}[|x_k(t)-x(t)|^2]$$

によって定義する。

補題2.3　関数族 $\{\Lambda_k(t)\}$ は正規族である。すなわち

$$|\Lambda_k(t)|\leq 2\sqrt{C_2}\,T^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

$$|\Lambda_k(t_1)-\Lambda_k(t_2)|\leq 2\sqrt{C_2}|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

が成り立つ。

証明

$t_2>t_1$ とする。

$$x(t_2)-x(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\sigma(s,\ x(s))dB(s)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|x(t_2)-x(t_1)|^2&=\mathbf{E}\left|\int_{t_1}^{t_2}\sigma(s,\ x(s))dB(s)\right|^2\\
&=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{E}|(\sigma(s,\ x(s))|^2ds\\
&\leq K\int_{t_1}^{t_2}(1+|x(s)|^2)ds\\
&\leq C_2(t_2-t_1)
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\mathbf{E}|x(t_2)-x(t_1)|^2\leq C_2|t_2-t_1|\quad(t_1,\ t_2\in[0,\ T])$$

同様にして

$$\mathbf{E}|x_k(t_2)-x_k(t_1)|^2\leq C_2|t_2-t_1|\quad(t_1,\ t_2\in[0,\ T])$$

$t_2>t_1$ とすると

$$\begin{aligned}
\Lambda_k(t_2)&=\|x_k(t_2)-x(t_2)\|_2\\
&\leq\|x_k(t_1)-x(t_1)\|_2+\|x_k(t_2)-x_k(t_1)\|_2\\
&\qquad+\|x(t_1)-x(t_2)\|\\
&\leq\Lambda_k(t_1)+2\sqrt{C_2}|t_2-t_1|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

t_2 と t_1 を入れ換えて

$$|\Lambda_k(t_2)-\Lambda_k(t_1)|\leq 2\sqrt{C_2}|t_2-t_1|^{\frac{1}{2}}$$

$t_1=0$，$t_2=t$ とおくと

$$|\Lambda_k(t)|\leq 2\sqrt{C_2}\,T^{\frac{1}{2}}$$

補題2.4　次の条件を満たす $\Lambda(t)$，$\lambda(t)$ が存在する。

(1)　$\Lambda(t)$，$\lambda(t)$ は連続である。

(2)　任意の $\epsilon>0$ に対し，正定数 $n_0(\epsilon)$ が存在し $k\geq n_0(\epsilon)$ ならば $\Lambda_k(t)\leq\Lambda(t)+\epsilon$，$t\in[0,\ T]$

証明

最初に $\Lambda(t)$ の連続性を示す。$\{\Lambda_k(t)\}$ は同程度連続で，一様有界であるから一様収束する部分列がとれる。その極限関数を $\psi(t)$ とする。$\{\psi(t)\}$ で極限関数全体をあらわすとき，

$$\Lambda(t)=\sup_{\{\psi\}}\psi(t)$$

従って任意の $\epsilon>0$ に対し，ψ_1 が存在し点 t_1 で

$$\psi_1(t_1)+\frac{\epsilon}{2}>\Lambda(t_1)$$

となる。$\psi_1(t)$ の一様連続性より，ある正定数 $\delta(\epsilon)$ が存在し，

$$|t_1-t_2|<\delta(\epsilon)\Longrightarrow|\psi_1(t_1)-\psi_1(t_2)|<\frac{\epsilon}{2}$$

従って

$$\Lambda(t_2)\geq\psi_1(t_2)\geq\psi_1(t_1)-\frac{\epsilon}{2}>\Lambda(t_1)-\epsilon$$

t_1 と t_2 を入れ換えて

$$\Lambda(t_1)\geq\Lambda(t_2)-\epsilon$$

ゆえに　$|t_1-t_2|<\delta(\epsilon)\Longrightarrow|\Lambda(t_1)-\Lambda(t_2)|<\epsilon$。$\Lambda(t)$ が連続であるから $\lambda(t)$ も連続である。$[0,\ T]$ 上で一様連続であるから，任意の $\epsilon>0$ に対し適当な $\delta(\epsilon)$ を定めて s，$\hat{s}\in[0,\ T]$ が $|s-\hat{s}|<\delta(\epsilon)$ である限り

$$|\Lambda(s)-\Lambda(\hat{s})|<\frac{\epsilon}{3},\ |\Lambda_k(s)-\Lambda_k(\hat{s})|<\frac{\epsilon}{3}$$

が成り立つ。$[0,\ T]$ の分割 $\delta=\{0=s_0<s_1<\cdots<s_m=T\}$ をとり，$|\delta|<\delta(\epsilon)$ とする。$\Lambda(t)$ の定義より各点 s_i に対し正定数 $N_\varepsilon(s_i)$ が存在し

$$k>N_\varepsilon(s_i)\Longrightarrow\Lambda_k(s_i)\leq\Lambda(s_i)+\frac{\epsilon}{3}$$

となる。$n_0=\max_{0\leq i\leq m}N_\varepsilon(s_i)$ とすると，

$$k\geq n_0\Longrightarrow\Lambda_k(s_i)\leq\Lambda(s_i)+\frac{\epsilon}{3}\quad(i=0,\ 1,\cdots,\ m)$$

$t_1\in[0,\ T]$ を固定すると $|t_1-s_i|<\delta(\epsilon)$ となる分点 s_i が存在する。この t_1 と s_i に対し一様連続性より

$$|\Lambda(t_1)-\Lambda(s_i)|<\frac{\epsilon}{3},\ |\Lambda_k(t_1)-\Lambda_k(s_i)|<\frac{\epsilon}{3}$$

従って

$$\begin{aligned}\Lambda_k(t_1)&\leq\Lambda_k(s_i)+\frac{\epsilon}{3}\\&\leq\Lambda(s_i)+\frac{2}{3}\epsilon\end{aligned}$$

一方

$$\Lambda(t_1)-\frac{\epsilon}{3}\leq\Lambda(s_i)\leq\Lambda(t_1)+\frac{\epsilon}{3}$$

より $k\geq n_0$ ならば

$$\Lambda_k(t_1)\leq\Lambda(t_1)+\frac{\epsilon}{3}+\frac{2}{3}\epsilon=\Lambda(t_1)+\epsilon$$

補題2.5　$\lambda(t)$ は次の条件を満たす。

$$\lambda(t)\leq\int_0^t\frac{\lambda(s)}{s^2}ds,\ t\in[0,\ T]\tag{14}$$

$$\lambda(t)=o(e^{-\frac{1}{t}}),\ \text{as}\ t\to0\tag{15}$$

証明

条件(C)より

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[|x_{k+1}(t)-x(t)|^2]\\&=\mathbf{E}\left|\int_0^t(\sigma(s,\ x_k(s))-(\sigma(s,\ x(s)))dB(s)\right|^2\\&=\int_0^t\mathbf{E}[|(\sigma(s,\ x_k(s))-(\sigma(s,\ x(s))|^2]ds\\&\leq\int_0^t\frac{\mathbf{E}|x_k(s)-x(s)|^2}{s^2}ds\end{aligned}$$

補題2.5より任意の $\epsilon>0$ に対し正定数 $n_0(\epsilon)$ が存在して

$$k\geq n_0(\epsilon)\Longrightarrow\Lambda_k(T)\leq\Lambda(t)+\varepsilon$$

$\lambda_k(t)=\mathbf{E}[|x_k(t)-x(t)|^2]$ とおくと

$$\lambda_k(t)=\Lambda_k^2(t)\leq(\Lambda(t)+\epsilon)^2\tag{16}$$

$$\leq\lambda(t)+2\sqrt{C_2}\,T^{\frac{1}{2}}\epsilon+\epsilon^2\tag{17}$$

よって

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1}(t)&\leq\int_0^t\frac{\lambda_k(s)}{s^2}ds\\&\leq\int_0^t\frac{\lambda(s)+2\sqrt{C_2}\,T^{\frac{1}{2}}\epsilon+\epsilon^2}{s^2}ds\end{aligned}$$

Lebesgue の有界収束定理より $\epsilon\to0$ として

$$\lambda_{k+1}(t)\leq\int_0^t\frac{\lambda(s)}{s^2}ds$$

$\limsup_{k\to\infty}$ をとって

$$\lambda(t)\leq\int_0^t\frac{\lambda(s)}{s^2}ds$$

また，条件(D)より $t\to0$ のとき

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1}(t)&=\mathbf{E}[|x_{k+1}(t)-x(t)|^2]\\&=\mathbf{E}\left|\int_0^t(\sigma(s,\ x_k(s))-(\sigma(s,\ x(s)))dB(s)\right|^2\\&=\int_0^t\mathbf{E}[|\sigma(s,\ x_k(s))-\sigma(s,\ x(s))|^2]ds\\&\leq2\int_0^t\mathbf{E}[|\sigma(s,\ x_k(s))|^2]ds\\&\quad+2\int_0^t\mathbf{E}[|\sigma(s,\ x(s))|^2]ds\\&\leq2\int_0^t\epsilon e^{-\frac{1}{s}}s^{-2}ds+2\int_0^t\epsilon e^{-\frac{1}{s}}s^{-2}ds\\&=4\epsilon e^{-\frac{1}{t}}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\limsup_{k\to\infty}\lambda_{k+1}(t)=\lambda(t)=o(e^{-\frac{1}{t}}),\ \text{as}\ t\to0$$

補題2.6　$\lambda(t)$ が3つの条件を満たすとする。

(1)　$\lambda(t)$ は区間 $[0,\ T]$ 上で非負の連続関数である。

(2)　$\lambda(t)\leq\int_0^t\frac{\lambda(s)}{s^2}ds$

(3)　$\lambda(t)=o(e^{-\frac{1}{t}}),\ \text{as}\ t\to0$

このとき，$\lambda(t)\equiv0$ が成り立つ。

証明

$\psi(t)=\int_0^t{}^{1/s^2}\lambda(s)ds$ とおく。$t>0$ に対し，t で微分すると $\psi'(t)=\frac{1}{t^2}\lambda(t)\leq\frac{1}{t^2}\psi(t)$。これより $(e^{\frac{1}{t}}\psi(t))'\leq0$，したがって $e^{\frac{1}{t}}\psi(t)$ は非増加関数である。$\epsilon>0$ に対し，(3)から充分小さい t に対し

$$e^{\frac{1}{t}}\psi(t)=e^{\frac{1}{t}}\int_0^t\frac{1}{s^2}\lambda(s)\,ds\leq e^{\frac{1}{t}}\int_0^t\frac{1}{s^2}\epsilon e^{-\frac{1}{s}}ds=\epsilon.$$

これより $\lim_{t\to0+}e^{\frac{1}{t}}\psi(t)=0$，これはすべての $t>0$ に対し，$e^{\frac{1}{t}}\psi(t)\leq0$ を意味する。従って $\psi(t)\leq0$。一方 $\psi(t)$ は非負であるから $\psi(t)\equiv0$。条件(1)より $\lambda(t)\equiv0$ が従う。

3　主要定理

定理3.1　係数 σ が条件(A)，(B)，(C)，(D)を満たすとき，方程式(1)の強い解が一意的に存在する。

証明

$x(t)$ と $\tilde{x}(t)$ を $x(0)=\tilde{x}(0)$ となる(1)の解とする。

$$\begin{aligned}\lambda(t)&\equiv\mathbf{E}[|x(t)-\tilde{x}(t)|^2]\\&=\mathbf{E}\left|\int_0^t(\sigma(s,\ x(s))-(\sigma(s,\ \tilde{x}(s)))dB(s)\right|^2\\&=\mathbf{E}\int_0^t|\sigma(s,\ x(s))-\sigma(s,\ \tilde{x}(s))|^2ds\\&\leq\int_0^t\frac{\mathbf{E}[|(x(s)-\tilde{x}(s)|^2]}{s^2}ds\\&\leq\int_0^t\frac{\lambda(s)}{s^2}ds\end{aligned}$$

また，条件(D)より $t\to 0$ のとき

$$\begin{aligned}\lambda(t)&=\mathbf{E}[|x(t)-\tilde{x}(t)|^2]\\&=\mathbf{E}\left|\int_0^t(\sigma(s,\ x(s))-\sigma(s,\ \tilde{x}(s)))dB(s)\right|^2\\&=\int_0^t\mathbf{E}[|\sigma(s,\ x(s))-\sigma(s,\ \tilde{x}(s))|^2]ds\\&\le 2\int_0^t\mathbf{E}[|\sigma(s,\ x(s))|^2]ds+2\int_0^t\mathbf{E}[|\sigma(s,\ \tilde{x}(s))|^2]ds\\&\le 2\int_0^t\epsilon e^{-\frac{1}{s}}s^{-2}\,ds+2\int_0^t\epsilon e^{-\frac{1}{s}}s^{-2}\,ds\\&=4\epsilon e^{-\frac{1}{t}}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\lambda(t)=0(e^{-\frac{1}{t}}),\ \text{as } t\to 0$$

補題2.6より $\lambda(t)\equiv 0$。

定理3.2　係数 σ が条件(A), (B), (C), (D)を満たすものとする。$\mathbf{E}[|\xi|]^2<\infty$ である限り(6)の逐次近似解は収束し

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|x_k(t)-x(t)|^2\right]=0$$

が成り立つ。

証明

補題2.5より

$$\lambda(t)\equiv\limsup_{k\to\infty}\mathbf{E}[|x_k(t)-x(t)|^2]$$

とおくと

$$\lambda(t)\le\int_0^t\frac{\lambda(s)}{s^2}\,ds\quad t\in[0,\ T]$$

$$\lambda(t)=o(e^{-\frac{1}{t}}),\ \text{as } t\to 0$$

が成り立つ。さらに，補題2.6から $\lambda(t)\equiv 0$，$t\in[0,\ T]$ が導かれる。また

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le T}|x_k(s)-x(s)|^2\right]\\&\quad\le\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le T}\left|\int_0^s(\sigma(u,\ x_k(u))-(\sigma(u,\ x(u)))dB(u)\right|^2\right].\end{aligned}$$

Doob のマルチンゲール不等式から

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le T}|x_k(s)-x(s)|^2\right]\\&\quad\le 4\int_0^T\mathbf{E}[|\sigma(u,\ x_k(u))-\sigma(u,\ x(u)))|^2\Big]du\\&\quad\le 4\int_0^T\frac{\mathbf{E}[|x_k(u)-x(u)|^2]}{u^2}\,du\end{aligned}\tag{18}$$

$\lambda(t)=\lim_{k\to\infty}\mathbf{E}[|x_k(t)-x(t)|^2]=0$ であるから(18)で $k\to\infty$ にすると

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le T}|x_k(t)-x(t)|^2\right]=0$$

が示される。

最後に，条件(A)，(B)，(C)，(D)を満たす例を以下に示す。

例3.1

$$\sigma(t,\ x)=\begin{cases}2e^{-\frac{1}{2t}}, & 0\le t\le T,\ te^{-\frac{1}{2t}}\le x<\infty\\ \dfrac{x}{t}+e^{-\frac{1}{2t}}, & 0\le t\le T,\ 0\le x\le te^{-\frac{1}{2t}}\\ e^{-\frac{1}{2t}}, & 0\le t\le T,\ -\infty<x\le 0\end{cases}\tag{19}$$

参考文献

［1］ K. Itô, On a stochastic integral equation, Proc. Japan Acad. 22 (1946), 32-35

［2］ S. Kawabata, On the successive approximation of solutions of stochastic differential equations, Stochastics and Stochastics Reports, Vol. 30 (1990), 69-84.

［3］ S. Kawabata：確率微分方程式の逐次近似解に関する研究，九州大学大学院，工学研究科，応用理学専攻，1990

［4］ T. Yamada, On the successive approximation of solutions of stochastic differential equations, J. Math. Kyoto Univ. Vol. 21, No.3 (1981), 501-515

［5］ T. Rogers, On Nagumo's condition, Canad. Math. Bull. 15 (1972), 609-611

［6］ A. V. Skorohod, "Studies in the theory of random processes", Addison-Wisley, 1965 (Originally published in Kiev).