論理的思考力を養うための離散数学教材の開発

―グラフ理論のパッキング問題の考察を通して―

高　橋　昌　也（短期大学部，情報メディア学科）

A Development of a Teaching Method of Discrete Mathematics for Growing the Logical Thinking Ability of Students ―By Using a Consideration for Packing Problem of Graph Theory―

Masaya TAKAHASHI (Department of Information and Multimedia Technology)

Abstract

For any integer $n \geqq 3$, let G be the maximal planar graph with n vertices and $m=3n-6$ edges, and, T_1, T_2 and T_3 be any three trees with $n-1$ vertices and $n-2$ edges each other. In this paper, we consider the following problem: T_1, T_2 and T_3 can be packed into G or not, in the $3 \leqq n \leqq 6$ case. As a conclusion, we can obtain that, if $3 \leqq n \leqq 5$ then the answer of the problem is "yes," else the answer is "no." In this paper, we discuss the detail of our consideration as follows: Let T_1, T_2 and T_3 be some three trees. Then, if T_1, T_2 and T_3 can be packed into G then we show an example of the packing. However, if they cannot be packed into G then we show the reason. Our object of this paper is to develop the teaching method for growing the logical thinking ability of first or second graders of university and junior college students, by using above the consideration.

Key words: *graph theory, discrete mathematics, Gyārfās-Lehel conjecture, logical thinking ability, teaching method*

１．はじめに

本稿の目的は『同じサイズの３つの木が極大平面的グラフにパッキング可能かどうかという問題』を提起・考察し，得られた結果を報告することであり，さらにその考察方法を今後，福岡工業大学短期大学部（以後，本学）の学生の論理的思考力を養うための離散数学教材となる可能性に言及することである。

まずグラフのパッキングに関する問題について，歴史的経過を交えて説明する。

k 個のグラフの集合 H_1，H_2，....，H_k がグラフ G に**パッキング可能**であるとは，互いに辺を共有しないような部分グラフ H_1，H_2，....，H_k により G が構成できることをいう。パッキングに関する問題としてよく知られている問題に，**理想木予想**がある。この問題は Gyārfās と Lehel により提案され[5),18)]，特別なケース[3),9),12),15−16),26),36),38)]を除いては現在も未解決である[35)]。なお，理想木予想とは，以下のような問題である。

理想木予想： 任意の整数 n について，辺の数がそれぞれ $0, 1, 2, ..., n-1$ であるような n 個の任意の木 T_1，T_2，....，T_n は完全グラフ K_n にパッキング可能である。

また，以下のような問題についても調べてみた。

問題Ａ： 任意の整数 n について，辺の数がすべて n であるような $2n+1$ 個の任意の木 T_1，T_2，....，T_{2n+1} は完全グラフ K_{2n+1} にパッキング可能であるかどうか。

この問題については，T_1，T_2，....，T_{2n+1} が同型の場合について1963年に Ringel により「可能である」ということで提案され[28−29)]，Kotzig により現在よく知られている **Ringel-Kotzig 予想**として定着している[29)]。そして1967年に Rosa により graceful labeling や rosy labeling などのラベリングによる解法が提案されている[29)]が，やはり特別なケース[1−4),6−8),10−11),13−14),19−25),29−30),37),39)]を除いては現在も未解決問題である[17)]。このように，T_1，T_2，....，T_{2n+1} が同型の場合ですら上記の「問題Ａ」は未解決であるので，任意の T_1，T_2，....，T_{2n+1} について「問題Ａ」は当然未解決問題である。このように，グラフのパッキングに関する問

平成30年５月29日受付

題は長年未解決なままの難解な問題が多く存在する。

次に，本節の最初に提示した問題を正確に記述すると，以下のようになる。

問題Ｂ：　3以上の任意の整数 n について，G を頂点の数が n で，辺の数が $m=3n-6$ となる極大平面的グラフとする。このとき，辺の数がすべて $n-2$ であるような3個の任意の木 T_1，T_2，T_3 は G にパッキング可能であるかどうか。

「問題Ｂ」は $n=6$ の時点で不可能な T_1，T_2，T_3 の組合せが出現したため，可能な組合せに共通した性質が見つからない限り，純粋な研究対象として議論を発展させていくことは難しい。そこで，「問題Ｂ」の研究を教材として発展させていくことは可能かどうか考えることとした。

２．離散数学教材としての可能性

本学では近年中のカリキュラム改定を考えており，実現した折には，PBL（Project Based Learning 課題解決型学習）科目[43)]として，筆者は『論理的に思考して証明することにより問題解決を図る』ことを主眼とする新しい科目である**「情報数学演習」**を担当する予定である。ここで，「論理的思考」を含む「科学的思考方法」とは，『学習者自らが様々な現実事象に対して，それを数学的に関わる問題と捉え，**論理的に思考して証明する**，実験などの客観的な手法を用いて検証するなどの方法によって問題解決を図る。』と定義されている[40)]。

そこで，折り紙の教育的効果[40−42)]と同様に，以下の⑴〜⑹の理由により，「問題Ｂ」が「論理的思考能力を養うための教材」として有効であると考え，上記の担当予定の科目の教材とすることとした。

⑴　折り紙と同様に，３つの木によるパッキングを見つける活動が，学習者どうしが互いに教え学び合う協同学習を可能にし，数学に対する苦手意識を少しでも軽減することができる。

⑵　高校の数学の知識をあまり必要とせず，視覚的にも分かり易いしないので，多くの学生が取り組みやすいと考えられる。

⑶　パッキング可能な組合せにおいて，パッキング方法は１通りとは限らないので，学習者が試行錯誤する中で多様な解を見つけることが可能である。

⑷　パッキング不可能な組合せにおいて，試行錯誤の中でなかなか解が見つからないときに，どこかで「不可能ではないのか」と判断する能力（判断力）や，「なぜ不可能なのか」という理由を考える能力（思考力）を養うことが可能である。

⑸　n の値が大きくなるにつれて，同型でない木や極大平面的グラフの数が爆発的に増えていくので，教材としてのボリュームや，難易度にいくつもの段階を持たせることができる。

⑹　本学のような情報系短大では折り紙はカリキュラムの中に組み入れることは難しいが，離散数学は学ぶべき重要な学問分野であり，グラフ理論は離散数学の重要な位置を占めているので，カリキュラムの中に組み入れることは可能である。

本稿の議論は以下のとおりである。第３章では「情報数学演習」の授業計画とその概要について述べる。第４章では，グラフのパッキングに関する問題の詳細な定義と，「問題Ｂ」を考察する上で必要な概念の定義とその説明を行う。

第５〜８章では，n が３〜６の場合の「問題Ｂ」について，３つの木のすべての組合せについて考察を行う。パッキング可能な場合は，その実際の例を１つ示し，不可能な場合はその理由を証明する。これらを学生の考察のガイドラインとして活用する。

第９章では結論として，考察結果の概要を一覧表として掲載し，今後の展望と課題について述べる。

３．「情報数学演習」の概要

まず，本科目は本学のカリキュラム改定が実現した場合に筆者が担当する予定の科目である。本科目は PBL 科目であるので，『課題の解決を目的とし，受講者の自主性･自立性を重んじ，チームの力によって課題を解決する』という特徴をもつ[43)]。それらを踏まえると，第１週〜第15週の授業計画は以下の表3.1のようになる。

表3.1　情報数学演習の授業計画

週	授　業　内　容
01	論理的思考を含む科学的思考方法，グラフ理論とグラフのパッキング問題
02	これまでの成果と今年度に取り組むべき作業の確認
03	グループ分けと担当するサブ問題の割り振り
04〜10	考察と進捗確認
11〜12	成果発表会
13〜14	成果報告書の作成
15	次年度への引継ぎ事項の整理

授業の各回の内容は以下のとおりである。なお，出てくるグラフ理論の用語は次章を参照されたし。

第１週：　授業内容に記述されている項目を簡潔に説明する。

第２週：　これまでの成果として，第５章〜第７章で述べる結果を提示し，説明する。今年度に取り組むべき作業として，第８章で述べるすべてのケースについて説明する。

第３週：　第８章で述べるすべてのケースについて，誰がどのケースを考察するか，担当者を決める。

第４週〜第10週：　科学的思考方法の枠組み[40]をベースに，第５章〜第７章で述べる結果を参考資料として，各学生が分担したケースを考察し，パッキング可能な場合はその実例を示し，不可能な場合はその証明をする。そのとき，次数列問題等の様々なグラフ理論の考え方を利用し，論理的思考[44]を用いて証明を行う。学生が行き詰っているときは教員がアドバイスを行う。このときの第８章で述べる結果をガイドラインとして活用する。また，各学生の捗確認を適宜行う。

第11週〜第12週：　各学生が，グループ単位でＡ４判１枚のレジュメを作成・配付し，パワーポイント等を使ってグループの成果を分担して発表する。質疑応答も行う。

第13週〜第14週：　考察したケースについて，得られた結果を報告書として作成する。報告書については，第８章の記述の要領で，書式や報告する項目，記述方法等細かく指導する。

第15週：　解決したケース，未解決のまま残ったケース等，次年度の受講者のためにドキュメントを作成する。

成績評価：　毎回の考察態度，提出された報告書，発表会での内容等を総合評価する。

以上が「情報数学演習」の概要である。以下，実際に授業で取り扱う「グラフのパッキング問題」とそのために必要なグラフ理論の基礎的な定義について述べる。

４．基礎的定義

グラフGは，**頂点**とよばれる有限な空でない要素の集合$V(G)$と，**辺**とよばれる$V(G)$の相異なるペアの部分集合$E(G)$からできている[5]。特に，本稿では$V(G)=\{v_1, v_2, ..., v_n\}$と表し，$n$を**位数**と呼び，頂点の個数とする。明らかに$n \geqq 1$である。このとき，$E(G)$は考えられるすべての$V(G)$のペア$(v_i,\ v_j)$の部分集合となる。(ただし，$i=1,\ 2,\ ....,\ n-1,\ j=i+1,\ i+2,\ ....,\ n$である。)また，$E(G)$の要素の数を$m$と表し，サイズと呼ぶ。ここで，文脈から明らかなときは，Gの頂点の集合，辺の集合をそれぞれ単にV，Eしてもよい。

また，Gの任意の異なる２つの頂点v_i，v_jについて，辺$(v_i,\ v_j)$が存在するとき，v_iとv_jは互いに**隣接している**といい，辺$(v_i,\ v_j)$は頂点v_iとv_jを**結ぶ**という。このとき，すべての$i=1,\ 2,\ ....,\ n-1,\ j=i+1,\ i+2,\ ....,\ n$について，$|(v_i,\ v_j)| \leqq 1$のとき$G$を**単純グラフ**といい，そうでないとき**多重グラフ**という。

Gの各頂点$v_i\ (i=1,\ 2,\ ...,\ n)$に隣接している頂点の個数s_iのことをv_iの**次数**とよぶ。このとき，グラフGの頂点の集合$V=\{v_1,\ v_2,\ ....,\ v_n\}$に対して，$S=\{s_1,\ s_2,\ ....,\ s_n\}$を$G$の**次数列**という。次数列は降順や昇順に並べ替えることがあるが，そのときは元の頂点の集合も対応する順番に並べ替えなくてはならない。

一方，「数列$A=\{a_1,\ a_2,\ ....,\ a_n\}$が与えられたとき，すべての整数$i=1,\ 2,\ ....,\ n$について頂点$v_i$の次数が$a_i$となるようなグラフが構成できるかどうかを判定し，できると判定されたときに実際に構成する。」という問題があり，グラフの**次数列問題**という[5]。また，**得点列問題**など，これらの問題の拡張版も存在する[31−34]が，詳細は省略する。

以上がグラフに関する最小限の用語等の定義である。通常ではグラフは図で表すと視覚的に非常に分かり易いが，比較的広いスペースを要し，作図に手間と時間がかかるため，下記の表4.1のような**隣接表**によりグラフを表現することにする。ただし，すべての整数$i=1,\ 2,\ ....,\ n,\ j=1,\ 2,\ ....,\ n$について，以下の式［A］を満足する。

表4.1　n頂点からなるグラフの隣接表

点番号	v_1	v_2	....	v_n
v_1	x_{11}	x_{12}	....	x_{1n}
v_2	x_{21}	x_{22}	....	x_{2n}
：	：	：	....	：
v_n	x_{n1}	x_{n2}	....	x_{nn}
次数	s_1	s_2	....	s_n

$$x_{ij}=\begin{cases}\bigcirc：v_i \text{ と } v_j \text{ が隣接している場合} \\ \times：v_i \text{ と } v_j \text{ が隣接していない場合}\end{cases} \quad ....［A］$$

例１：　$V=\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5\}$，$E=\{(v_1,\ v_2),\ (v_1,\ v_5),\ (v_2,\ v_3),\ (v_2,\ v_4),\ (v_3,\ v_4),\ (v_3,\ v_5),\ (v_4,\ v_5)\}$とすると，$G$は以下の表4.2のように表すことができる。

このとき，$n=5$，$m=7$となり，$(v_1,\ v_3)$，$(v_1,\ v_3)$，$(v_2,\ v_5)$はEに含まれない。さらに，各頂点v_1，v_2，v_3，v_4，v_5の次数はそれぞれ２，３，３，３，３であり，次数列は$S=\{2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3\}$である。また，Sの要素２を最後尾に移動させてできた次数列を$S'=\{3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 2\}$とすると，対応するように並べ替えられた頂点の集合は$V'=\{v_5,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}$となる。(例１終了)

表4.2　例題１の隣接表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	×	○	×	×	○
v_2	○	×	○	○	×
v_3	×	○	×	○	○
v_4	×	○	○	×	○
v_5	○	×	○	○	×
次数	2	3	3	3	3

次に，パッキングに関する定義を述べる。2つのグラフ $G=(V, E)$ と $G'=(V', E')$ について，$V'\subseteq V$ かつ $E'\subseteq E$ であるとき G' はGの**部分グラフ**であるという。k 個のグラフの集合 $H_1, H_2, ..., H_k$ がグラフGがグラフ $H_1, H_2, ...,$ H_k により**パッキング可能**であるとは，互いに辺を共有しないような部分グラフ H_1，H_2，...，H_k によりGが構成できることをいう。

隣接表と同様に，グラフGが部分グラフ H_1，H_2，...，H_k によりパッキング可能な場合，そのパッキングの例を下記の表4.3のような**パッキング表**で表現することにする。ただし，すべての整数 $i=1$，2，...，n，$j=1$，2，...，n について，以下の式［B］を満足する。

表4.3　n頂点からなるグラフGのパッキング表

点番号	v_1	v_2	....	v_n
v_1	y_{11}	y_{12}	....	y_{1n}
v_2	y_{21}	y_{22}	....	y_{2n}
:	:	:	....	:
v_n	y_{n1}	y_{n2}	....	y_{nn}

$$y_{ij}=\begin{cases} 1 & (v_i,\ v_j)\in H_1 \text{ の場合} \\ 2 & (v_i,\ v_j)\in H_2 \text{ の場合} \\ & \cdots\cdots \\ k & (v_i,\ v_j)\in H_k \text{ の場合} \\ 0 & (v_i,\ v_j)\notin G \text{ の場合} \end{cases} \quad \text{....［B］}$$

例2：　グラフ G_1 を下記の表4.4のようなグラフとする。このとき，G_1 は下記の表4.5のようなグラフ H_1, H_2 によりパッキング可能である。パッキング表を表4.6に示す。（例2終了）

例3：　表4.4のようなグラフ G_1 は下記の表4.7のようなグラフ H'_1, H'_2 によるパッキングは不可能である。ここで，$V(G_1)=\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}$，$V(H_1)=V(H_2)=V(H'_1)=V(H'_2)=\{u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4\}$ とする。

G_1 が表4.7のようなグラフ H'_1, H'_2 によるパッキングが不可能である理由は以下のとおりである。G_1 の次数列は $S=(3, 3, 3, 3)$ である。明らかに G_1 は H'_1 または H'_2 のどちらか一方を部分グラフとすることはできる。ここで，H'_1 が部分グラフであるとしても一般性を失わない。G_1 からの H'_1 辺のみを取り去ったグラフを G'_1 とすると，G'_1 の次数列を降順に並べ替えて得られる次数列は $S'=(2, 2, 2, 0)$ となる。一方 H'_1，H'_2 の次数列はいずれも $(3, 1, 1, 1)$ であるので，H'_2 は G'_1 の部分グラフとなることはできない。よって，G_1 は H'_1, H'_2 によるパッキングは不可能である。（例3終了）

表4.4　例2のグラフ G_1

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	×	○	○	○
v_2	○	×	○	○
v_3	○	○	×	○
v_4	○	○	○	×
次数	3	3	3	3

表4.5　例2のグラフ $H_1=H_2$

点番号	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	×	○	×	×
u_2	○	×	○	×
u_3	×	○	×	○
u_4	×	×	○	×
次数	1	2	2	1

表4.6　例2で得られたパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	2	2
v_2	1	0	1	2
v_3	2	1	0	1
v_4	2	2	1	0

表4.7　例2のグラフ $H'_1=H'_2$

点番号	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	×	○	○	○
u_2	○	×	×	×
u_3	○	×	×	×
u_4	○	×	×	×
次数	3	1	1	1

また，木とそれに関連する定義を述べる。u，v をグラフGの任意の2頂点とする。Gの ***u-v* 歩道**とは，u で始まり v で終わるようなGの頂点と辺が交互に現れる有限列のことである。$u=v$，$u\neq v$ のとき u-v 歩道はそれぞれ**閉じている**または開いているという。同じ辺が2度以上現れない u-v 歩道を ***u-v* 小道**といい，同じ頂点が2度以上現れ

ない u-v 歩道を **u-v パス**という。自明でない閉じた小道のことを**回路**という。同じ頂点が２度以上現れない回路のことを**サイクル**という。グラフ G のどの２頂点 u，v について u-v パスが存在するとき，G は**連結である**という。**木**とはサイクルをもたない連結グラフのことである。u，v を木 T の任意の２頂点とすると，u-v パスは一意に決まる[5)]。

<u>例４：</u>　表4.5のようなグラフ H_1，H_2 や表4.7のようなグラフ H'_1，H'_2 は木である。また，以下の表4.8のようなグラフ T も木である。しかし，以下の表4.9のようなグラフ T' は木ではない。以下の表4.10のような T' の部分グラフ T'' はサイクルとなるからである。ここで，$V(T)=V(T')=\{u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ u_6\}$ とする。（例４終了）

さらに，極大平面的グラフとそれに関連する定義を述べる。２つのグラフ $G=(V,\ E)$ と $G'=(V',\ E')$ が**同型である**とは，「ある V から V' への１対１写像 f が存在して，V の任意の２頂点 v_i，v_j に対して E の辺 $(v_i,\ v_j)$ が存在することと E' の辺 $(f(v_i),\ f(v_j))$ が存在することが同値である。」が成り立つことである。**平面グラフ**とは，平面上の頂点集合と，それを交差なく結ぶ辺集合からなるグラフのことである。**平面グラフ**と同型のグラフを平面的グラフという。平面的グラフの位数を n，サイズを m とすると $n\geqq 3$ かつ $m\leqq 3n-6$ が成り立つ[5)]。また，平面的グラフ G について，G の隣接していないどのような頂点の組を辺で結んでも平面的グラフでなくなるとき，G を**極大平面的グラフ**という。極大平面的グラフについては $n\geqq 3$ かつ $m=3n-6$ が成り立つ[5)]。

表4.8　例３のグラフ T

点番号	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	×	○	○	○	×	×
u_2	○	×	×	×	○	○
u_3	○	×	×	×	×	×
u_4	○	×	×	×	×	×
u_5	×	○	×	×	×	×
u_6	×	○	×	×	×	×
次数	3	3	1	1	1	1

<u>例５：</u>　表4.4のようなグラフ G_1 は極大平面的グラフグラフである。また，以下の表4.11のようなグラフ G_2 も極大平面的グラフグラフである。しかし，以下の表4.12や表4.13のようなグラフ G_3 や G_4 は極大平面的グラフグラフではない（そもそも平面的グラフではない[5)]）。ここで，$V(G_2)=V(G_3)=\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_6\}$ とし，$V(G_4)=\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5\}$ とする。（例５終了）

表4.9　例３のグラフ T'

点番号	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	×	○	○	○	×	×
u_2	○	×	○	×	○	×
u_3	○	○	×	×	×	○
u_4	○	×	×	×	×	×
u_5	×	○	×	×	×	×
u_6	×	×	○	×	×	×
次数	3	3	3	1	1	1

表4.10　例４のグラフ T''（T' の部分グラフ）

点番号	u_1	u_2	u_3
u_1	×	○	○
u_2	○	×	○
u_3	○	○	×
次数	2	2	2

表4.11　例５のグラフ G_2

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	×	○	○	×	○	○
v_2	○	×	○	○	×	○
v_3	○	○	×	○	○	×
v_4	×	○	○	×	○	○
v_5	○	×	○	○	×	○
v_6	○	○	×	○	○	×
次数	4	4	4	4	4	4

表4.12　例５のグラフ G_3

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	×	×	×	○	○	○
v_2	×	×	×	○	○	○
v_3	×	×	×	○	○	○
v_4	○	○	○	×	×	×
v_5	○	○	○	×	×	×
v_6	○	○	○	×	×	×
次数	3	3	3	3	3	3

以下の章では n 個の頂点集合 $V=\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$ と $m=3n-6$ 個の辺集合 $E=\{e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_m\}$ からなる極大平面的グラフ G がいずれもサイズ $n-2$ の任意の３つの木 T_1,

T_2，T_3 によりパッキング可能な場合，そのパッキングの例を下記の表4.14のような**パッキング表**で表現することにする。ただし，すべての整数 $i=1, 2, ..., n$，$j=1, 2, ..., n$ について，以下の式［C］を満足する。

$$z_{ij}=\begin{cases} 1 & (v_i,\ v_j)\in T_1 \text{ の場合} \\ 2 & (v_i,\ v_j)\in T_2 \text{ の場合} \\ 3 & (v_i,\ v_j)\in T_3 \text{ の場合} \\ 0 & (v_i,\ v_j)\notin G \text{ の場合} \end{cases} \quad ....［C］$$

表4.13　例5のグラフ G_4

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	×	○	○	○	○
v_2	○	×	○	○	○
v_3	○	○	×	○	○
v_4	○	○	○	×	○
v_5	○	○	○	○	×
次数	4	4	4	4	4

表4.14　n 頂点からなる極大平面的グラフ G のパッキング表

点番号	v_1	v_2	....	v_n
v_1	z_{11}	z_{12}	....	z_{1n}
v_2	z_{21}	z_{22}	....	z_{2n}
:	:	:	....	:
v_n	z_{n1}	z_{n2}	....	z_{nn}

5．3点からなる極大平面的グラフに関する考察

3頂点からなる極大平面的グラフは3本の辺をもつ。従って，『3頂点からなる極大平面的グラフは，1本の辺をもつ3つの木によってパッキング可能であるかどうか』について考察する。

5.1　3頂点からなる極大平面的グラフ

3頂点からなる極大平面的グラフ G は以下の表5.1のようなグラフである。ここで，G の頂点集合を $V(G)=\{v_1, v_2, v_3\}$ とする。

5.2　1本の辺からなる木

1本の辺からなる木 T は以下の表5.2のようなグラフである。ここで，T の頂点集合を $V(T)=\{u_1, u_2\}$ とする。

5.3　3つの木によるパッキング

表5.1のような極大平面的グラフが，同サイズの3つの木 T_1，T_2，T_3 によってパッキング可能な場合，T_1，T_2，T_3 はいずれも表4.2のようになる。よって，本章の問題の解の一例として以下の表5.3のようなパッキング表が得られる。

表5.1　3頂点からなる極大平面的グラフ G

点番号	v_1	v_2	v_3
v_1	×	○	○
v_2	○	×	○
v_3	○	○	×
次数	2	2	2

表5.2　1本の辺からなる木 T

点番号	u_1	u_2
u_1	×	○
u_2	○	×
次数	1	1

表5.3　3頂点からなる極大平面的グラフのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3
v_1	0	1	3
v_2	1	0	2
v_3	3	2	0

6．4頂点からなる極大平面的グラフに関する考察

4頂点からなる極大平面的グラフは6本の辺をもつ。従って，『4頂点からなる極大平面的グラフは，2本の辺をもつ3つの木によってパッキング可能であるかどうか』について考察する。

6.1　4頂点からなる極大平面的グラフ

4頂点からなる極大平面的グラフ G は表4.4と同型のグラフである。ここで，G の頂点集合を $V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ とする。

6.2　2本の辺からなる木

2本の辺からなる木 T は以下の表6.1のようなグラフである。ここで，T の頂点集合を $V(T)=\{u_1, u_2, u_3\}$ とする。

表6.1　2本の辺からなる木 T

点番号	u_1	u_2	u_3
u_1	×	○	○
u_2	○	×	×
u_3	○	×	×
次数	2	1	1

6.3　3つの木によるパッキング

表4.4と同型の極大平面的グラフが，同サイズの3つの木 T_1，T_2，T_3 によってパッキング可能な場合，T_1，T_2，T_3 は

いずれも表6.1のようになる。よって，本章の問題の解の一例として以下の表6.2のようなパッキング表が得られる。

表6.2　4頂点からなる極大平面的グラフのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	3	3
v_2	1	0	1	2
v_3	3	1	0	2
v_4	3	2	2	0

7．5頂点からなる極大平面的グラフに関する考察

5頂点からなる極大平面的グラフは9本の辺をもつ。従って，『5頂点からなる極大平面的グラフは，3本の辺をもつ3つの木によってパッキング可能であるかどうか』について考察する。

7.1　5頂点からなる極大平面的グラフ

5頂点からなる極大平面的グラフGは以下の表7.1のようなグラフである。ここで，Gの頂点集合を $V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ とする。

表7.1　5頂点からなる極大平面的グラフG

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	×	○	×	○	○
v_2	○	×	○	○	○
v_3	×	○	×	○	○
v_4	○	○	○	×	○
v_5	○	○	○	○	×
次数	3	4	3	4	4

7.2　3本の辺からなる木

3本の辺からなる同型でない木は，表4.7と同型のグラフTと，表4.5と同型のグラフ T' の2種類存在する。Tを「**1型**」，T' を「**2型**」と呼ぶ。

7.3　3つの木によるパッキング

表7.1のような極大平面的グラフが，同サイズの3つの木 T_1，T_2，T_3 によりパッキングすることを「$\boldsymbol{(i, j, k)}$**-パッキング**」と呼ぶことにする。ここで i，j，k はそれぞれ T_1, T_2, T_3 の型である。この場合は，以下の⑴〜⑷の4ケースが考えられれる。

⑴　すべてが1型の場合。

⑵　2つの木が1型でもう1つが2型の場合。

⑶　2つの木が2型でもう1つが1型の場合。

⑷　すべてが2型の場合。

以上の4つの場合をそれぞれ(1，1，1)-パッキング，(1，1，2)-パッキング，(1，2，2)-パッキング，(2，2，2)-パッキングとしても一般性は失われない。

(1，1，1)-パッキング，(1，1，2)-パッキング，(1，2，2)-パッキング，(2，2，2)-パッキングそれぞれの解の一例として以下の表7.2〜表7.5のようなパッキング表が得られる。

表7.2　5頂点からなる極大平面的グラフの(1，1，1)-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	3	0	1	2
v_2	3	0	3	1	3
v_3	0	3	0	1	2
v_4	1	1	1	0	2
v_5	2	5	2	2	0

表7.3　5頂点からなる極大平面的グラフの(1，1，2)-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	3	0	1	2
v_2	3	0	3	1	2
v_3	0	3	0	1	3
v_4	1	1	1	0	2
v_5	2	2	3	2	0

表7.4　5頂点からなる極大平面的グラフの(1，2，2)-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	3	0	1	2
v_2	3	0	3	2	2
v_3	0	3	0	1	3
v_4	1	2	1	0	1
v_5	2	2	3	1	0

8．6頂点からなる極大平面的グラフに関する考察

6頂点からなる極大平面的グラフは12本の辺をもつ。従って，『6頂点からなる極大平面的グラフを，4本の辺をもつ3つの木によってパッキング可能であるかどうか』について考察する。

表7.5　5頂点からなる極大平面的グラフの(2，2，2)-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	3	0	1	2
v_2	3	0	3	1	1
v_3	0	3	0	2	3
v_4	1	1	2	0	2
v_5	2	1	3	2	0

8.1　6点からなる極大平面的グラフ

6頂点からなる同型でない極大平面的グラフは，以下の表8.1のようなグラフと，表8.2のようなグラフの2種類存在する。表8.1のようなグラフを「**A型**」，表8.2のグラフを「**B型**」と呼び，それぞれG，G'と表す。ここで，G，G'の頂点集合を $V(G)=V(G')=\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_6\}$ とする。

表8.1　6頂点からなるA型の極大平面的グラフG

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	×	○	×	×	○	○
v_2	○	×	○	×	○	○
v_3	×	○	×	○	○	○
v_4	×	×	○	×	○	○
v_5	○	○	○	○	×	○
v_6	○	○	○	○	○	×
次数	3	4	4	3	5	5

表8.2　6頂点からなるB型の極大平面的グラフ G'

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	×	○	×	○	○	○
v_2	○	×	○	×	○	○
v_3	×	○	×	○	○	○
v_4	○	×	○	×	○	○
v_5	○	○	○	○	×	×
v_6	○	○	○	○	×	×
次数	4	4	4	4	4	4

8.2　4本の辺からなる木

4本の辺からなる同型でない木は，以下の表8.3のようなグラフT，表8.4のようなグラフ T'，表8.5のようなグラフT'' の3種類存在する。Tを「**1型**」，T' を「**2型**」，T'' を「**3型**」と呼ぶ。ここで，T，T'，T'' の頂点集合を $V(T)=V(T')=V(T'')=\{u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5\}$ とする。

8.3　3つの木によるパッキング

6頂点からなる極大平面的グラフを，同サイズの3つの木 T_1，T_2，T_3 によりパッキングすることを6.3節と同様に「**(i，j，k)-パッキング**」と呼ぶことにする。ここで i，j，k はそれぞれ T_1，T_2，T_3 の型である。この場合は，以下の(01)～(10)の10ケースが考えられれる。

表8.3　4本の辺からなる木T

点番号	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
u_1	×	○	○	○	○
u_2	○	×	×	×	×
u_3	○	×	×	×	×
u_4	○	×	×	×	×
u_5	○	×	×	×	×
次数	4	1	1	1	1

表8.4　4本の辺からなる木 T'

点番号	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
u_1	×	○	○	○	×
u_2	○	×	×	×	○
u_3	○	×	×	×	×
u_4	○	×	×	×	×
u_5	×	○	×	×	×
次数	3	2	1	1	1

表8.5　4本の辺からなる木 T''

点番号	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
u_1	×	○	○	×	×
u_2	○	×	×	○	×
u_3	○	×	×	×	○
u_4	×	○	×	×	×
u_5	×	×	○	×	×
次数	2	2	2	1	1

(01)　すべてが1型の場合。
(02)　2つの木が1型でもう1つが2型の場合。
(03)　2つの木が1型でもう1つが3型の場合。
(04)　2つの木が2型でもう1つが1型の場合。
(05)　3つの木の型がすべて異なる場合。
(06)　2つの木が3型でもう1つが1型の場合。
(07)　すべてが2型の場合。
(08)　2つの木が2型でもう1つが3型の場合。
(09)　2つの木が3型でもう1つが2型の場合。
(10)　すべてが3型の場合。

以上の10つの場合をそれぞれ(1，1，1)-パッキング，(1，1，2)-パッキング，(1，1，3)-パッキング，(1，2，2)-パッキング，(1，2，3)-パッキング，(1，3，3)-パッキング，(2，2，2)-パッキング，(2，2，3)-パッキング，(2，3，3)-パッキング，(3，3，3)-パッキングとしても一般性は失われない。

8.3.1　6頂点からなるA型の極大平面的グラフ

まず，(1，1，1)-パッキングについては以下の定理1を得る。さらに，(1，1，2)-パッキング，(1，1，3)-パッキング，(1，2，2)-パッキング，(1，2，3)-パッキング，(1，3，3)-パッキング，(2，2，2)-パッキング，(2，2，3)-パッキング，(2，3，3)-パッキング，(3，3，3)-パッキングそれぞれの解の一例として以下の表8.6～表8.14のようなパッキング表が得られる。

表8.6　6頂点からなるA型の極大平面的グラフの(1，1，2)-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	3	0	0	1	2
v_2	3	0	3	0	1	2
v_3	0	3	0	3	1	3
v_4	0	0	3	0	1	2
v_5	1	1	1	1	0	2
v_6	2	2	3	2	2	0

表8.7　6頂点からなるA型の極大平面的グラフの(1，1，3)-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	3	0	0	1	2
v_2	3	0	3	0	1	2
v_3	0	3	0	3	1	2
v_4	0	0	3	0	1	3
v_5	1	1	1	1	0	2
v_6	2	2	2	3	2	0

表8.8　6頂点からなるA型の極大平面的グラフの(1，2，2)-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	3	0	0	1	2
v_2	3	0	3	0	1	2
v_3	0	3	0	3	1	3
v_4	0	0	3	0	2	2
v_5	1	1	1	2	0	1
v_6	2	2	3	2	1	0

定理1：　6頂点からなるA型極大平面的グラフの(1，1，1)-パッキングは不可能である。

証明：　グラフの次数列問題の解法を用いて証明を行う。6頂点からなるA型極大平面的グラフGを構成する頂点の次数を降順に並べた次数列は$S=(5,5,4,4,3,3)$である。(実際，頂点v_5，v_6，v_2，v_3，v_1，v_4の次数はそれぞれ5，5，4，4，3，3である。)以下では，1型の3つの木T_1，T_2，T_3からSを次数列にもつようなグラフ(極大平面的グラフとは限らない。また，多重グラフとなる可能性もある)を構成できないことを背理法により示す。

1型の3つの木T_1，T_2，T_3からSを次数列にもつようなグラフまたは多重グラフG_1が存在すると仮定し，T_1，T_2，T_3の次数4の頂点をそれぞれu'_1，u'_2，u'_3とする。このとき，明らかに$V(G_1)=V(G)$である。

G_1はT_1，T_2，T_3のいずれかを部分グラフとすることはできる。ここで，T_1が部分グラフであるとしても一般性を失わない。

u'_1がG_1の任意の次数5の頂点wとすると，wに部分グラフT_1の頂点として隣接するG_1の4つの頂点は以下のCase 01～03のいずれかである。また，u'_1がG_1の任意の次数4の頂点wとすると，wに部分グラフT_1の頂点として隣接するG_1の4つの頂点は以下のCase 04～09のいずれかである。

Case 01：もう一方の次数5の頂点，2つの次数4の頂点，どちらか一方の任意の次数3の頂点。

Case 02：もう一方の次数5の頂点，どちらか一方の任意の次数4の頂点，2つの次数3の頂点。

Case 03：2つの次数4の頂点，2つの次数3の頂点。

Case 04：2つの次数5の頂点，もう一方の次数4の頂点，どちらか一方の任意の次数3の頂点。

Case 05：2つの次数5の頂点，2つの次数3の頂点。

Case 06：どちらか一方の任意の次数5の頂点，もう一方の次数4の頂点，2つの次数3の頂点。

G_1からT_1の辺を取り去ったグラフまたは多重グラフをG_2とし，G_2の頂点の次数を降順に並べた次数列をS'とすると，上記の6ケースからそれぞれ，以下の6通りのS'が考えられる：$S'=(4,3,3,3,2,1)$，$S'=(4,4,3,2,2,1)$，$S'=(5,3,3,2,2,1)$，$S'=(4,4,3,3,2,0)$，$S'=(4,4,4,2,2,0)$，$S'=(5,4,3,2,2,0)$。

G_2はT_2，T_3のいずれかを部分グラフとすることはできる。ここで，T_2が部分グラフであるとしても一般性を失わない。

u'_2がG_2の任意の次数5の頂点zとすると，zに部分グラフT_2の頂点として隣接するG_2の4つの頂点は以下のCase 07～10のいずれかである。また，u'_2がG_2の任意の次数4の頂点zとすると，zに部分グラフT_2の頂点として隣接するG_2の4つの頂点は以下のCase 11～19のいずれかである。

Case 07：$S'=(5,3,3,2,2,1)$かつ，2つの次数3の頂点，2つの次数2の頂点。

Case 08：$S'=(5,3,3,2,2,1)$かつ，2つの次数3の頂点，どちらか一方の任意の次数2の頂点，次数1の頂点。

Case 09：$S'=(5,3,3,2,2,1)$かつ，どちらか一方の

任意の次数３の頂点，２つの次数２の頂点，次数１の頂点。

Case 10：$S'=(5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 2,\ 0)$かつ，次数４の頂点，次数３の頂点，２つの次数２の頂点。

Case 11：$S'=(4,\ 3,\ 3,\ 3,\ 2,\ 1)$かつ，３つの次数３の頂点，次数２の頂点。

Case 12：$S'=(4,\ 3,\ 3,\ 3,\ 2,\ 1)$かつ，３つの次数３の頂点，次数1の頂点。

Case 13：$S'=(4,\ 3,\ 3,\ 3,\ 2,\ 1)$かつ，任意の２つの次数３の頂点，次数２の頂点，次数１の頂点。

Case 14：$S'=(4,\ 4,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1)$かつ，もう一方の次数４の頂点，次数３の頂点，２つの次数２の頂点。

Case 15：$S'=(4,\ 4,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1)$かつ，もう一方の次数４の頂点，次数３の頂点，どちらか一方の任意の次数２の頂点，次数１の頂点。

Case 16：$S'=(4,\ 4,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1)$かつ，もう一方の次数４の頂点，２つの次数２の頂点，次数１の頂点。

Case 17：$S'=(4,\ 4,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1)$かつ，次数3の頂点，２つの次数２の頂点，次数１の頂点。

Case 18：$S'=(4,\ 4,\ 3,\ 3,\ 2,\ 0)$かつ，もう一方の次数４の頂点，２つの次数３の頂点，次数２の頂点。

Case 19：$S'=(4,\ 4,\ 4,\ 2,\ 2,\ 0)$かつ，残りの２つの次数４の頂点，２つの次数２の頂点。

G_2からT_2の辺を取り去ったグラフまたは多重グラフをG_3とし，G_3の頂点の次数を降順に並べた次数列をS''とすると，上記の19ケースからそれぞれ，以下の８通りのS''が考えられる：$S''=(2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$，$S''=(2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0)$，$S''=(3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0)$，$S''=(2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0)$，$S''=(3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0)$，$S''=(3,\ 3,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)$，$S''=(4,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)$，$S''=(3,\ 3,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)$。しかし，これら８通りの$S''$のどれからも$T_3$と同型の木となるグラフまたは多重グラフ$G_3$を構成することはできない。

以上の議論より，１型の３つの木T_1，T_2，T_3からSを次数列にもつようなグラフ(極大平面的グラフとは限らない。また，多重グラフとなる可能性もある）を構成できないことが示された。よって，６頂点からなるＡ型極大平面的グラフの(1，1，1)-パッキングは不可能である。　■

表8.9　６頂点からなるＡ型の極大平面的グラフの(1，2，3)-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	3	0	0	1	2
v_2	3	0	3	0	1	2
v_3	0	3	0	3	2	2
v_4	0	0	3	0	1	3
v_5	1	1	2	1	0	1
v_6	2	2	2	3	1	0

表8.10　６頂点からなるＡ型の極大平面的グラフの(1，3，3)-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	1	0	0	3	2
v_2	1	0	1	0	1	1
v_3	0	1	0	3	2	3
v_4	0	0	3	0	2	2
v_5	3	1	2	2	0	3
v_6	2	1	3	2	3	0

表8.11　６頂点からなるＡ型の極大平面的グラフの(2，2，2)-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	1	0	0	1	1
v_2	1	0	3	0	2	2
v_3	0	3	0	3	3	2
v_4	0	0	3	0	1	2
v_5	1	2	3	1	0	3
v_6	1	2	2	2	3	0

表8.12　６頂点からなるＡ型の極大平面的グラフの(2，2，3)-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	3	0	0	1	2
v_2	3	0	3	0	1	2
v_3	0	3	0	3	2	2
v_4	0	0	3	0	3	1
v_5	1	1	2	3	0	1
v_6	2	2	2	1	1	0

8.3.2　６頂点からなるＢ型の極大平面的グラフ

まず，(1，1，1)-パッキング，(1，1，2)-パッキング，(1，1，3)-パッキング，(1，2，2)-パッキングについては以下の定理２及び定理３を得る。さらに，(1，2，3)-パッキング，(1，3，3)-パッキング，(2，2，2)-パッキング，(2，2，3)-パッキング，(2，3，3)-パッキング，(3，3，3)-パッキングそれぞれの解の一例として以下の表8.15～表8.20のようなパッキング表が得られる。

定理２：　すべての整数$k=1,2,3$について，６頂点からなるＢ型極大平面的グラフの(1，1，k)-パッキングは不可能である。

証明：　グラフの次数列問題の解法を用いて証明を行

う。６頂点からなるＢ型極大平面的グラフを構成する頂点の次数を降順に並べた次数列は $S=(4, 4, 4, 4, 4, 4)$ である。（実際，頂点 v_6，v_5，v_4，v_3，v_2，v_1 の次数はすべて４である。）以下では，２つの１型の木 T_1，T_2 と k 型の木 T_3 から S を次数列にもつようなグラフ（極大平面的グラフとは限らない。また，多重グラフとなる可能性もある）を構成できないことを背理法により示す。

１型の２つの木 T_1, T_2 と k 型の木 T_3 から S を次数列にもつようなグラフまたは多重グラフ G_1 が存在すると仮定する。明らかに $V(G_1)=V(G)$ である。

まず, 以下の Case 01, 02の２つのケースに分けて考察する。

Case 01：最初に G_1 から１型の木を抽出する。

Case 02：最初に G_1 から k 型の木 T_3 を抽出する。

以下, **Case 01**について考察する。G_1 は T_1，T_2 のいずれかを部分グラフとすることはできる。ここで，T_1 が部分グラフであるとしても一般性を失わない。

G_1 から T_1 の辺を取り去ったグラフまたは多重グラフを G_2 とし，G_2 の頂点の次数を降順に並べた次数列を S' とすると，$S=(4, 4, 4, 4, 4, 4)$なので，$S'=(4, 3, 3, 3, 3, 0)$となる。このとき，以下の２ケースが考えられる。

Case 01-A：G_2 から T_2 を抽出する。G_2 から T_2 の辺を取り去ったグラフまたは多重グラフをG_3 とし，G_3 の頂点の次数を降順に並べた次数列を S'' とすると，$S'=(4, 3, 3, 3, 3, 0)$なので，$S''=(2, 2, 2, 2, 0, 0)$となる。しかし, G_3 が木となるためには, S'' には少なくとも２つの１がなければならない[5]。よって，S'' から T_3 と同型の木となるグラフまたは多重グラフ G_3 を構成することはできない。

Case 01-B：G_2 から T_3 を抽出する。G_2 から T_3 の辺を取り去ったグラフまたは多重グラフをG_3 とし，G_3 の頂点の次数を降順に並べた次数列を S'' とすると，同様に以下の４通りの S'' が考えられる：$S''=(2, 2, 2, 2, 0, 0)$，$S''=(3, 2, 2, 1, 0, 0)$，$S''=(3, 2, 1, 1, 1, 0)$，$S''=(2, 2, 2, 1, 1, 0)$。しかし，これら４通りの S'' のどれからも T_2 と同型の木となるグラフまたは多重グラフ G_3 を構成することはできない。

以下, **Case 02**について考察する。G_1 から T_3 の辺を取り去ったグラフまたは多重グラフを G_3 とし，G_3 の頂点の次数を降順に並べた次数列を S' とすると，以下の３通りのが考えられる：$S'=(4, 3, 3, 3, 3, 0)$，$S'=(4, 3, 3, 3, 2, 1)$，$S'=(4, 3, 3, 2, 2, 2)$。しかし，G_2 が互いに辺を共有しないような部分グラフ T_1，T_2 から構成されるためには，S' には少なくとも２つの２がなければならない。よって，S'から T_1，T_2 と同型の２つの木からグラフまたは多重グラフ G_3 を構成することはできない。

以上の議論より，２つの１型の木 T_1，T_2 と k 型の木 T_3 から S を次数列にもつようなグラフ（極大平面的グラフとは限らない。また，多重グラフとなる可能性もある）を構成できないことが示された。よって，６頂点からなるＢ型極大平面的グラフの$(1, 1, k)$-パッキングは不可能である。■

表8.13　６頂点からなるＡ型の極大平面的グラフの$(2, 3, 3)$-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	1	0	0	1	1
v_2	1	0	3	0	2	2
v_3	0	3	0	3	1	2
v_4	0	0	3	0	2	3
v_5	1	2	1	2	0	3
v_6	1	2	2	3	3	0

表8.14　６頂点からなるＡ型の極大平面的グラフの$(3, 3, 3)$-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	1	0	0	1	2
v_2	1	0	3	0	2	2
v_3	0	3	0	3	1	1
v_4	0	0	3	0	2	3
v_5	1	2	1	2	0	3
v_6	2	2	1	3	3	0

表8.15　６頂点からなるＢ型の極大平面的グラフの$(1, 2, 3)$-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	3	0	2	1	2
v_2	3	0	3	0	1	2
v_3	0	3	0	3	1	2
v_4	2	0	3	0	1	3
v_5	1	1	1	1	0	0
v_6	2	2	2	3	0	0

表8.16　６頂点からなるＢ型の極大平面的グラフの$(1, 3, 3)$-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	3	0	2	1	2
v_2	3	0	2	0	1	3
v_3	0	2	0	3	1	2
v_4	2	0	3	0	1	3
v_5	1	1	1	1	0	0
v_6	2	3	2	3	0	0

定理３：　６頂点からなるＢ型極大平面的グラフの$(1, 2, 2)$-パッキングは不可能である。

証明：　グラフの次数列問題の解法を用いて証明を行う。６頂点からなるＢ型極大平面的グラフを構成する頂点の次数を降順に並べた次数列は $S=(4, 4, 4, 4, 4, 4)$で

ある。以下では，１型の木 T_1 と２つの２型の木 T_2, T_3 から S を次数列にもつようなグラフ（極大平面的グラフとは限らない。また，多重グラフとなる可能性もある）を構成できないことを示す。

１型の木 T_1 と２型の２つの木 T_2, T_3 から S を次数列にもつようなグラフまたは多重グラフ G_1 が存在すると仮定する。明らかに $V(G_1)=V(G')$ である。

まず, 以下の Case 01, 02の２つのケースに分けて考察する。

Case 01：最初に G_1 から１型の木 T_1 を抽出する。

Case 02：最初に G_1 から２型の木を抽出する。

以下，**Case 01** について考察する。G_1 から T_1 の辺を取り去ったグラフまたは多重グラフを G_2 とし，G_2 の頂点の次数を降順に並べた次数列を S' とすると，$S=(4, 4, 4, 4, 4, 4)$ なので，$S'=(4, 3, 3, 3, 3, 0)$ となる。

G_2 は２型の木 T_2, T_3 のいずれかを部分グラフとすることはできる。ここで，T_2 が部分グラフであるとしても一般性を失わない。G_2 から T_2 の辺を取り去ったグラフまたは多重グラフを G_3 とし，G_3 の頂点の次数を降順に並べた次数列を S'' とすると，以下の３通りの S'' が考えられる：$S''=(2, 2, 2, 1, 1, 0)$, $S''=(2, 2, 2, 2, 0, 0)$, $S''=(3, 2, 2, 1, 0, 0)$。しかし，G_3 が T_3 と同型のグラフとなるためには, S'' には少なくとも３つの１がなければならない。よって，S'' から T_3 と同型の木となるグラフまたは多重グラフ G_3 を構成することはできない。

以下，**Case 02** について考察する。G_1 は ２型の木 T_2, T_3 のいずれかを部分グラフとすることはできる。ここで，T_2 が部分グラフであるとしても一般性を失わない。G_1 から T_2 の辺を取り去ったグラフまたは多重グラフを G_2 とし, G_2 の頂点の次数を降順に並べた次数列を S' とすると，$S=(4, 4, 4, 4, 4, 4)$ なので，$S'=(4, 3, 3, 3, 2, 1)$ となる。

G_2 は１型の木 T_1 または２型の木 T_3 のいずれかを部分グラフとすることはできる。そこで, 以下の Case 03, 04の２つのケースに分けて考察する。

Case 03：最初に G_2 から１型の木 T_1 を抽出する。

Case 04：最初に G_2 から２型の木 T_3 を抽出する。

以下, **Case 03**について考察する。G_2 から T_1 の辺を取り去ったグラフまたは多重グラフを G_3 とし，G_3 の頂点の次数を降順に並べた次数列を S'' とすると, Case 01と同じ以下の３通りの S'' が考えられる：$S''=(2, 2, 2, 1, 1, 0)$, $S''=(2, 2, 2, 2, 0, 0)$, $S''=(3, 2, 2, 1, 0, 0)$。よって, 同じ理由で S'' から T_3 と同型の木となるグラフまたは多重グラフ G_3 を構成することはできない。

以下, Case **04**について考察する。G_2 から T_1 の辺を取り去ったグラフまたは多重グラフを G_3 とし，G_3 の頂点の次数を降順に並べた次数列を S'' とすると，以下の９通りの S'' が考えられる：$S''=(2, 2, 2, 1, 1, 0)$, $S''=(2, 2, 2, 2, 0, 0)$, $S''=(3, 2, 2, 1, 0, 0)$, $S''=(2, 2, 1, 1, 1, 1)$, $S''=(3, 2, 1, 1, 1, 0)$, $S''=(3, 3, 1, 1, 0, 0)$, $S''=(4, 2, 1, 1, 0, 0)$, $S''=(3, 3, 2, 0, 0, 0)$, $S''=(4, 2, 2, 0, 0, 0)$。しかし，G_3 が T_1 と同型のグラフとなるためには，S'' には少なくとも１つの４と，少なくとも４つの１がなければならない。よって，S'' から T_1 と同型の木となるグラフまたは多重グラフ G_3 を構成することはできない。

以上の議論より，１型の木 T_1 と２つの２型の木 T_2, T_3 から S を次数列にもつようなグラフ G（極大平面的グラフとは限らない。また，多重グラフとなる可能性もある）を構成できないことが示された。よって，６頂点からなるB型極大平面的グラフの(1, 2, 2)-パッキングは不可能である。 ■

表8.17　６頂点からなるB型の極大平面的グラフの(2, 2, 2)-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	3	0	1	1	2
v_2	3	0	3	0	1	2
v_3	0	3	0	3	1	3
v_4	1	0	3	0	2	2
v_5	1	1	1	2	0	0
v_6	2	2	3	2	0	0

表8.18　６頂点からなるB型の極大平面的グラフの(2, 2, 3)-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	3	0	1	1	3
v_2	3	0	3	0	1	2
v_3	0	3	0	3	1	2
v_4	1	0	3	0	2	2
v_5	1	1	1	2	0	0
v_6	3	2	2	2	0	0

表8.19　６頂点からなるB型の極大平面的グラフの(2, 3, 3)-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	3	0	1	1	3
v_2	3	0	2	0	1	2
v_3	0	2	0	3	1	3
v_4	1	0	3	0	2	2
v_5	1	1	1	2	0	0
v_6	3	2	3	2	0	0

表8.20　6頂点からなるB型の極大平面的グラフの(3，3，3)-パッキングのパッキング表

点番号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	3	0	1	1	3
v_2	3	0	1	0	1	2
v_3	0	1	0	3	2	3
v_4	1	0	3	0	2	2
v_5	1	1	2	2	0	0
v_6	3	2	3	2	0	0

9．結論

本稿では，折り紙の教育的効果と同様に，論理的思考力を養うための離散数学教材としてグラフ理論の以下のような問題が有効であると考え，特にnが3～6の場合について考察を行った。

問題：3以上の任意の整数nについて，Gを頂点の数がnで，辺の数が$m=3n-6$となる極大平面的グラフとする。このとき，辺の数がすべて$n-2$であるような3個の任意の木T_1，T_2，T_3はGにパッキング可能であるかどうか。

結果は以下の(1)～(4)のとおりである。

(1)　$n=3$の場合，3個の任意の木T_1，T_2，T_3はGにパッキング可能である。パッキング例は表5.3に示している。また，極大平面的グラフは表5.1に，木は表5.2に示している。

(2)　$n=4$の場合，3個の任意の木T_1，T_2，T_3はGにパッキング可能である。パッキング例は表6.2に示している。また，極大平面的グラフは表4.4に，木は表6.1に示している。

(3)　$n=5$の場合，3個の任意の木T_1，T_2，T_3はGにパッキング可能である。パッキング例は表7.2～表7.5に示している。また，極大平面的グラフは表7.1に，1型の木は表4.7に，2型の木は表4.5にそれぞれ示している。

(4)　$n=6$の場合，パッキング結果は以下の表9.1～表9.2のとおりである（○が可，×が否）。パッキング可能な場合の例は表8.15～表8.20に示している。パッキング不可能な場合は定理1～3において，『なぜ不可能なのか』という理由を，グラフ次数列問題の考え方を使って数学的に示した。また，A型の極大平面的グラフは表8.1に，B型の極大平面的グラフは表8.2に，1型の木は表8.3に，2型の木は表8.4に，3型の木は表8.5にそれぞれ示している。

今後の課題は以下のとおりである。まず，上記「問題」の解（パッキング可能な場合は一例を提示する，不可能な場合はその理由を数学的に証明する）を考察することにより，論理的思考力を養うことはできるが，論理的思考に関する一般論[44]についても簡潔に解説する必要がある。また，「ダイヤカット缶の問題」を科学的思考方法の枠組みに落とし込んだ[44]ように，上記問題を科学的思考方法の枠組みに落とし込み，その方法論に基づいた授業方法を確立する必要がある。

表9.1　6頂点からなるA型の極大平面的グラフのパッキングの可否

木の型			パッキングの可否
T_1	T_2	T_3	
1	1	1	×
1	1	2	○
1	1	3	○
1	2	2	○
1	2	3	○
1	3	3	○
2	2	2	○
2	2	3	○
2	3	3	○
3	3	3	○
3	3	3	○

表9.2　6頂点からなるB型の極大平面的グラフのパッキングの可否

木の型			パッキングの可否
T_1	T_2	T_3	
1	1	1	×
1	1	2	×
1	1	3	×
1	2	2	×
1	2	3	○
1	3	3	○
2	2	2	○
2	2	3	○
2	3	3	○
3	3	3	○

また，$n=7, 8, \ldots$とnの値を大きくしていって，教材のボリュームを増やしていかなければならず，そのときのグラフやパッキング例の表現方法を開発する必要がある。

さらには，実際の授業で本教材の有効性を検証することも今後の課題である。

参考文献

1）V. J. Abhyanker, *Directed methods of gracefully labeling graphs*, Ph. D. Thesis, University of Mumbai (2002).

2）R. E. L. Alfred and B. D. Mckay, *Graceful and harmonious labeling of trees*, Bull. Inst. Appl. 23 (1998), pp.69–72.

3）I.Anderson, *Perfect matching of a graph*, Journal of Combinatorial Theory, vol.10B, pp.183–186, 1971.

4）M. Bahl, S. Lake and A. Wertheim, *Gracefulness of families of spiders*, http://fac-staff.unca.edu/pbahls/paper/Spiders.pdf.

5）M.Behzard, G.Chartrand and L.L.Foster, "Graphs and Digraphs," Prindle, Weber and Schmidt, 1979.

6）J. C. Bermond, *Graceful graphs, radio antennae and French windmills*, Graph Theory and Combinatorics, Pitman, London (1979), pp.18–37.

7）J. C. Bermond and D. Sotteau, *Graph decompositions and G-design*, Proc. 5th British Combin. Conf. (1975), Congr. Numer., XV (1976), pp.53–72.

8）V. Bhat-Nayak and D. Deshmukh, *New families of graceful banana trees*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 106 (1996), pp.187–190.

9）B.Bollobás, *Some remarks on packing trees*, Discrete Math., vol.46, pp.203–204, 1983.

10）W. C. Chen, H. I. Lu and Y. N. Yeh, *Operations of interlaced trees and graceful trees*, Southeast Asian Bull., 21 (1994), pp.15–18.

11）F. R. K. Chung and F. K. Hwang, *Rotatable graceful graphs*, Ars Combin., 11 (1981), pp.239–250.

12）E.Dobson, *Packing trees into the complete graph*, Combinatorics, Probability and Computing, vol.11, issue. 3 (May), pp.263–272, 2002.

13）M. Edwards and L. Howard, *A survey of graceful trees*, Atlantic Electronic Journal of Mathematics, vol.1, no.1 (2006).

14）W. Fang, *A computational approach to the graceful tree conjecture*, arXiv: 1003.3045vl [cs.DM].

15）J.F.Fink and H.J.Straight, *A note on path-perfect graphs*, Discrete Mathematical Monthly 1, vol.33, pp.95–98, 1981.

16）P.C.Fishbum, *Packing graphs with odd and even trees*, Journal of Graph Theory, vol.7, Issue 3 (October), pp.369–383, 2006.

17）J. Gallian, *A dynamic survey of graph labeling*, The Electronic Journal of Mathematics, 18 (2011), pp.1–256, http://www.combinatorics.org/,　ftp://ftp.gwdg.de/pub/EMIS/journals/EJC/Surveys/ds6.pdf.

18）A.Gyárfás and J.Lehel, *Packing trees of different order into K_n*, Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely), vol.18 of Colloq. Math. Soc. J. Bol., North-Holland, pp.463–469, 1978.

19）M. Horton, *Graceful trees: Statistics and Algorithms*, (2003), University of Tasmania, http://eprint.utas.edu.au/19/1/GracefulTreesStatisticsAndAlgorithms.pdf.

20）P. Hrnčiar and A. Haviar, *All trees of diameter five are graceful*, Discrete Math., 233 (2001), pp.133–150.

21）A. Kotzig, *On certain vertex-valuations of finite graphs*, Utilitas Math., 4 (1973), pp.261–290.

22）D. Mishra and P. Panigrahi, *Graceful lobsters obtained by component moving of diameter four trees*, Computers and Mathematics with Applications, 50 (August 2005), pp.367–380.

23）D. Mishra and P. Panigrahi, *Some graceful lobsters with all three types of branches incident on the vertices of the central path*, Computers and Mathematics with Applications, 56 (2008), pp.1382–1394.

24）D. Morgan, *All lobsters with perfect matchings are graceful*, Technical Report, University of Alberta, TR05–01, Jan 2005, http://www.cs.ualberta.ca/research/techreports/2005.php.

25）H. K. Ng, *Gracefulness of a class of lobsters*, Notices AMS 7 (1986), abstract no.825–05–294.

26）J.Petersen, *Die Theorie der regulären Graphs*, Acta Math. vol.15, pp.193–220, 1891.

27）G. Ringel, *Problem 25*, Theory of graphs and its applications. Proc. Symposium Smolenice (1963), Academia (1964), p.162.

28）A. Rosa, *On certain valuations of the vertices of a graph*, Theory of Graphs (Proc. International Symposium, Rome, 1966), Gordon and Breach, N. Y. and Dunod Paris (1967), pp.349–355.

29）A. Rosa, *Labeling Snakes*, ARS Combinatoria, 3 (1977), pp.67–74.

30）G. Sethuraman and J. Heesintha, *A new class of graceful Lobsters*, J. Combin. Math. Combin. Computing, 67 (2008), pp.99–109.

31）M.Takahashi, *Score sequence problems of r-tournaments*, IEICE Trans. Fundamentals., vol.E80–A. No.2 (February), pp.377–385, 1997.

32）M.Takahashi, K.Imai and T.Asano, *Graphical degree sequence problems*, IEICE Trans. Fundamentals., vol.E 77–A. No.3 (March), pp.546–552, 1994.

33）M. Takahashi, T. Watanabe and T. Yoshimura, *Score sequence pair problems of (r_{11}, r_{12}, r_{22})-tournaments 〜Determination of realizability〜*, IEICE Trans. Inf. &

Syst., vol.E90-D. No.2 (February), pp.440-448, 2007.

34）Masaya Takahashi, Takahiro Watanabe, Takeshi Yoshimura, *Construction of an (r_{11}, r_{12}, r_{22})-Tournament from a Score Sequence Pair*. The Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems at New Orleans: pp.3403-3406, 2007.

35）A. Taraz, *On the tree-packing conjecture of Gyarfas and Lehel*, https://www.math.tugraz.at/mathb/seminar/20121113-taraz.pdf (2012).

36）W.T.Tutte, *A short proof of the factor theorem for finite graphs*, Canadian Journal of Mathematics, vol.6, pp.347-352, 1954.

37）J. G. Wang, D. J. Jin, X. G. Lu and D. Zhang, *The gracefulness of a class of lobster trees*, Math. Comput. Modeling, 20 (1994), pp.105-110.

38）Zaks and Liu, *Decomposition of graphs into trees*, Proceedings of the Eighth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing. Utilitas Math., Winnipeg, pp.643-654, 1977.

39）S. L. Zhao, *All trees of diameter four are graceful*, Annals New York Academy of Sciences (1986), pp.700-706.

40）葛城元，黒田恭史，「科学的思考方法の習得を目指したオリガミクスによる数学教材の開発―ダイヤカット缶を題材として―」，数学教育学会誌，第57巻（2016），pp. 125-139.

41）長谷川和恵，吉田稔，「教材としての折り紙のもつ教育的価値について」，信州大学教育学部紀要，第112巻（2004），pp.25-32.

42）堀井洋子，『折り紙と数学』，明治図書.

43）先導的ITスペシャリスト育成推進プログラム 拠点間教材等洗練事業PBL教材洗練WG編，「PBL型授業実施ノウハウ集（2011年7月改定案）」，http://grace-center.jp/wp-content/uploads/2012/05/pblknowhow20110726.pdf（2018年7月10日現在）

44）福澤一吉，『論理的に説明する技術（初版第4刷），SB Creative（2013）.