

# 福岡工業大学 機関リポジトリ

## FITREPO

Title	垂直磁界中における超伝導薄板内の電流前線
Author(s)	野田 稔
Citation	福岡工業大学研究論集 第41巻第2号 P113-P120
Issue Date	2008-9
URI	<a href="http://hdl.handle.net/11478/971">http://hdl.handle.net/11478/971</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	Publisher

Fukuoka Institute of Technology

# 垂直磁界中における超伝導薄板内の電流前線

野 田

稔 (電子情報工学科)

## Current Front in a Superconducting Thin Plate under a Perpendicular Magnetic Field

Minoru NODA (Department of Information Electronics)

### Abstract

A configuration of shielding current front in a superconducting thin plate under a perpendicular magnetic field  $H_e$ , can be well approximated by a curve for very thin film limit, having a theoretical expression based on the critical state model with constant superconducting current density  $J_c$ . Two parameters included in this curve expression may be determined by magnetic shield conditions, which are (1) zero field at the center of the plate, and (2) zero 2nd-derivative of the field variation near center. In the case of inverse aspect ratio  $\alpha=0.1, 0.01, 0.001$ , two parameters are calculated numerically, which processes require very careful treatment with the above condition (2) as  $\alpha$  becomes very small. Calculated results are estimated as how these curve parameters depend on  $H_e$  and  $\alpha$ . On the basis of this estimation, we propose some formulas approximately fitting with calculated ones for wide range of  $H_e$  and  $\alpha$ , which are useful for practical uses.

**Keywords:** *superconducting thin plate, perpendicular field, shielding current front, inverse aspect ratio, zero 2nd-derivative of the field variation*

### 1. はじめに

交流磁界に垂直な超伝導薄板は、薄板の幅が大きいほど交流損失密度が大きくなるので、板のアスペクト比が特性に及ぼす影響を調べることは重要である。

これまでに本研究では、交流磁界に垂直な超伝導平板内の電流分布を決定するため、アスペクト比が5:1程度の比較的厚い板を対象に、電流領域と被遮蔽領域の境界である電流前線をn次曲線でモデル化してきた<sup>1-4)</sup>。しかしこの方法は、平板厚みが非常に小さくなって薄板になると、特に低磁界の前線形状の決定が困難になる傾向が出ていた。

薄板の極限では、従来 Brandt と Indenbom<sup>5)</sup>による薄板幅方向のシート電流密度分布式が用いられている。このシート電流密度は厚み方向の電流分布を平均化したものである。Yamafuji 等<sup>6)</sup>は、超伝導電流密度が一定の場合、シート電流密度から厚み方向の電流層幅を逆算して電流前線の形状式を与えた。さらに、前線の形状式の中のパラメータにアスペクト比依存性を与えるため、被遮蔽領域内の磁界値を一定化しそれをゼロとおく条件をある近似のもとに適

用した。この計算では平板中心付近の磁界変化の2次微係数がゼロにはならないという指摘がなされた。

本研究では、板厚みの変化、すなわちアスペクト比の変化に伴う電流前線形状の変化を数値的に調べることを目的とする。その際用いる遮蔽条件は、平板中心での磁界ゼロとその付近での磁界変化の2次微係数ゼロである。上記の薄板の極限での電流前線形状式には、板の中心線上における前線位置が唯一のパラメータとして含まれ、それが外部磁界の関数として与えられている。アスペクト比が変わった場合、この前線形状を2個のパラメータで表して、これらの磁界とアスペクト比依存性を数値計算法で調べることにした。

特に、薄板になるほど低磁界の前線形状の決定が困難になる点を分析し、有効な数値計算の手法を組み立てた。この手法を用い、今回はアスペクト比10:1, 100:1, 1000:1の場合の結果を求め、これらを比較して実用的な近似式を与えることを目指した。数値計算には MATLAB<sup>7)</sup>を用いた。

### 2. 前線形状の式と遮蔽条件

直交座標  $(X, Y, Z)$  において、 $Z$  方向に無限長で、 $X$

方向の幅  $2D_x$ ,  $Y$  方向の厚み  $2D_Y$  を持つ超伝導平板に垂直な ( $Y$  方向) 磁界  $H_e$  がかかる場合を考える。平板内部を磁気遮蔽するための超伝導電流は  $Z$  方向に流れる。逆アスペクト比  $\alpha$  を  $\alpha = D_Y/D_x$  で与え, 規格化座標  $x = X/D_x$ ,  $y = Y/D_Y$  を導入する。本報告では簡単のため,  $\alpha$  の異なる平板を比較するさいに, 厚み  $D_Y$  を一定とし, 幅  $D_x$  が変わる場合を想定する。

薄板の極限では, 薄板幅方向のシート電流密度分布  $J_s(x)$  は次式で与えられる。(Brandt & Indenbom<sup>5)</sup>)

$$J_s(x) = \frac{4}{\pi} J_c D_Y \arctan\left(x \sqrt{\frac{1 - x_{F0}^2}{x_{F0}^2 - x^2}}\right) \quad (2.1)$$

$$x_{F0} = \operatorname{sech} h_e \quad (2.2)$$

$$h_e = H_e/H_{PB} \quad ; \quad H_{PB} = (2/\pi) J_c D_Y \quad (2.3)$$

$J_c$  は超伝導電流密度の大ききで, 電流領域中では一定と仮定する。 $x_{F0}$  は電流前線が  $x$  軸を切る位置であり, 区間  $x_{F0} < |x| < 1$  では電流が板厚全体にわたり分布する。規格化磁界  $h_e$  の定義式 (2.3) で使われる磁界  $H_{PB}$  は, 幅  $2D_Y$  の平板面に平行磁界がかかった場合の中心到達磁界  $J_c D_Y$  の  $(2/\pi)$  倍の値をもつ量である。

式 (2.1) を  $x$  点における平板の上下表面層に流れる電流の合計に等置して, 層の幅から電流前線の位置を  $x_F(y)$  として定めると, 次式を得る。(Yamafuji et. al.<sup>6)</sup>)

$$|x_F(y)| = \frac{x_{F0}}{\sqrt{1 + (\nabla/T)^2}} \quad (2.4)$$

$$T = \tan\left(\frac{\pi}{2}(1 - |y|)\right) \quad (2.5)$$

$$\nabla^2 = 1 - x_{F0}^2 = \tanh^2 h_e \quad (2.6)$$

上式 (2.1)~(2.6) は, 逆アスペクト比  $\alpha$  が  $\alpha \rightarrow 0$  のとき成り立つとされる関係であるが,  $\alpha$  がゼロでない場合も (2.4) 式の形状関係は成り立つと仮定しよう。ただし  $\alpha$  がゼロでない場合は, (2.2) および (2.6) 式の関係は保証せず,  $x_{F0}$  と  $\nabla$  は一般に規格化磁界  $h_e$  と  $\alpha$  に依存するパラメータとみなして, これを数値的に定めることを本研究の目的とする。

真の電流前線で囲まれた被遮蔽領域内ではいたるところ磁界が完全にゼロとなるが, 式 (2.4) の電流前線は近似曲線なのですべてをゼロにはできない。そこで, 原点付近で  $x$  軸上の磁界を  $x$  で展開したときの初項と第 2 項がゼロとなるように与えることにする。すなわち, 原点における磁界がゼロ, および原点付近の磁界の 2 次微係数がゼロという条件を与えて, 2 つの電流前線パラメータ  $x_{F0}$  と  $\nabla$  を定める。

$x$  軸上の磁界は, ビオ・サバル則より次式で与えられる。

$$H(x, 0) = H_e - \frac{J_c D_Y}{2\pi} \int_0^1 dy_0 \left\{ \ln\left(\frac{(1-x)^2 + \alpha^2 y_0^2}{(x_F(y_0) - x)^2 + \alpha^2 y_0^2}\right) + \ln\left(\frac{(1+x)^2 + \alpha^2 y_0^2}{(x_F(y_0) + x)^2 + \alpha^2 y_0^2}\right) \right\} \quad (2.7)$$

$x$  軸上原点付近の磁界変化の 2 次微係数は, 次式となる。

$$\left[ \frac{1}{D_x^2} \cdot \frac{\partial^2 H(x, 0)}{\partial x^2} \right]_{x \rightarrow 0} = \frac{2J_c}{\pi D_x} \left\{ \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} - \alpha \int_0^1 dy_0 \frac{x_F(y_0)^2 - \alpha^2 y_0^2}{(x_F(y_0)^2 + \alpha^2 y_0^2)^2} \right\} \quad (2.8)$$

原点  $(x, y) = (0, 0)$  で磁界が完全に遮蔽される条件は, (2.7) 式より次のようになる。

$$H_e = \frac{J_c D_Y}{\pi} \int_0^1 dy_0 \ln\left(\frac{1 + \alpha^2 y_0^2}{x_F(y_0)^2 + \alpha^2 y_0^2}\right) \quad (2.9)$$

磁束の中心到達時の磁界を  $H_p$  とすれば, 上式で  $x_F(y_0) = 1$  のとき  $H_e = H_p$  ゆえ,

$$H_p = H_{PB} \cdot F_1(\alpha) \quad (2.10)$$

$$F_1(\alpha) = (1/2) \ln(1 + \alpha^2) + \alpha^{-1} \arctan \alpha \quad (2.11)$$

を得る。 $H_p/H_{PB}$  の  $\alpha$  依存性は関数  $F_1(\alpha)$  で与えられ, それは図 1 のように変化する。 $\alpha = 0.1, 0.01, 0.001$  における  $F_1(\alpha)$  は, それぞれ 3.304, 5.605, 7.908 となる。 $\alpha < 0.5$  の範囲では,  $F_1(\alpha)$  は直線式  $F_1(\alpha) = 1 - \ln \alpha$  で十分近似できる。また,  $\alpha > 5$  では  $F_1(\alpha)$  は  $(\pi/2)/\alpha$  に近似でき,  $\alpha \rightarrow \infty$  では  $H_p$  は幅  $2D_x$  の平板 (スラブ) に平行磁界がかかった場合の中心到達磁界  $J_c D_x$  に一致する。

(2.9) 式の両辺を  $H_{PB}$  で割れば, 原点の磁界遮蔽条件として次式を得る。

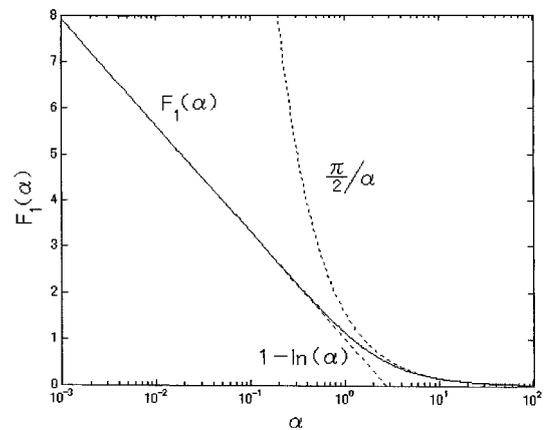


図 1 (2.11) 式の関数  $F_1(\alpha)$ , すなわち  $H_p/H_{PB}$  の  $\alpha$  依存性。 $\alpha = 0.1, 0.01, 0.001$  における  $F_1(\alpha)$  は, それぞれ 3.304, 5.605, 7.908 となる。 $\alpha < 0.5$  の範囲では  $F_1(\alpha) = 1 - \ln \alpha$  で十分近似できる。

$$h_e = (1/2)S_1(1) \tag{2.12}$$

ただし  $S_1(1)$  は次式より与えられる積分量である。

$$S_1(y) \equiv \int_0^y f_1(y_0) dy_0; \tag{2.13}$$

$$f_1(y) \equiv \ln\left(\frac{1 + \alpha^2 y^2}{x_F(y)^2 + \alpha^2 y^2}\right) \tag{2.14}$$

$x$  軸上原点付近の磁界変化の 2 次微係数がゼロになる条件は、(2.8)式より

$$R_2 = S_2(1) \tag{2.15}$$

と表される。ここに  $R_2$ ,  $S_2(1)$  は次式より与えられる。

$$R_2 \equiv \frac{1}{1 + \alpha^2}; \quad S_2(y) \equiv \int_0^y f_2(y_0) dy_0; \tag{2.16}$$

$$f_2(y) \equiv \frac{x_F(y)^2 - \alpha^2 y^2}{(x_F(y)^2 + \alpha^2 y^2)^2} \tag{2.17}$$

$\alpha^2$  が 1 より十分小さければ、 $R_2 \approx 1 - \alpha^2$  ゆえ、 $S_2(1)$  が 1 よりわずかに小さな積分値となる場合に (2.15) 式の解があることになる。

### 3. 電流前線形状の $\nabla$ 依存性

(2.4)式より、第 1 象限で  $x_F(x)/x_{F0}$  を  $y$  に対してプロットすると、図 2 のようになる。パラメータ  $\nabla$  が異なる 9 本の曲線を描いている。 $\nabla$  が小さいと前線は平板の面と端に近い位置に現れ、 $\nabla$  が大きくなるにつれ平板内部へ前線が入りこんでいる様子がわかる。従って、 $\nabla$  は磁界  $h_e$  の増加関数になることが予想される。曲線  $x_F(y)$  の傾きは、 $y=0$

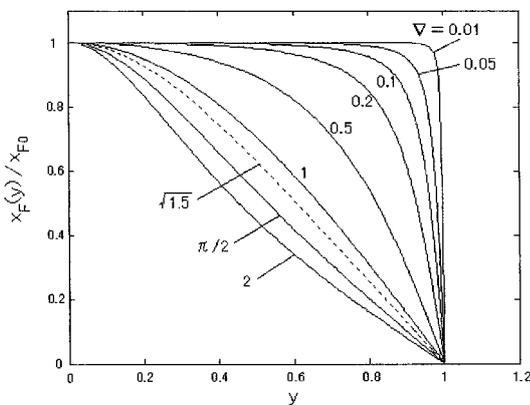


図 2  $x_F(y)/x_{F0}$  の  $y$  に対するプロット。パラメータ  $\nabla$  が異なる 9 本の曲線を描いている。曲線  $x_F(y)$  の傾きは  $y=0$  でゼロ、 $y>0$  では常に負となる。図中の点線で示した曲線  $x_F(y)$  は  $\nabla = \sqrt{3}/2$  のときで、これより  $\nabla$  が大きいと曲線  $x_F(y)$  は平板内部へ凹む形になる。

でゼロだが、 $y>0$  では常に負で、 $y \rightarrow 1$  のとき  $\partial x_F(y)/\partial y = -(\pi/2)x_{F0}/\nabla$  の傾斜で直線的に落ちる。また、 $\partial^2 x_F(y)/\partial y^2 \propto 2\nabla^2 - T^2 - 3$  なので、 $\nabla$  が小さいときはいつも上に凸の曲線だが、 $\nabla$  が大きくなると曲率が変わるところがでてくる。変曲点が生じない範囲は、

$$0 \leq \nabla \leq \sqrt{3/2} \approx 1.225 \tag{3.1}$$

となる。図 2 中の点線で示した曲線  $x_F(y)$  は  $\nabla = \sqrt{3}/2$  のときで、これより  $\nabla$  が大きいと曲線  $x_F(y)$  は平板内部へ凹む形になる。

### 4. 関数 $f_2(y)$ の変化と積分 $S_2(y)$ の積分範囲

(2.17) 式で与えた関数  $f_2(y)$  の振舞いを調べる。一例として、 $\alpha=0.1$ ,  $x_{F0}=0.9$  で、 $\nabla=0.1 \sim 1.5$  の場合について、 $f_2(y)$  を  $y$  に対してプロットすると、図 3 のようになる。

$y$  を 0 から増加していくと、 $f_2(y)$  は始め  $f_2(0)=1$  とほぼ同じ値で推移し、途中から大きく増加して頂点に達したあと、急激に落下してゆき、 $y=1$  で負の値  $-1/\alpha^2$  に達する。 $f_2(y)=0$  になる点は、 $x_F^2 = (\alpha y)^2$  が満たされるところで、 $\alpha$  と  $\nabla$  が小さいほど  $y=1$  に近い位置になる。この付近で非常に大きな変化が正と負の間にわたり起こるため、 $f_2(y)$  の積分である  $S_2(y)$  に大きな影響を与えることが予想される。

そこで、 $1-y$  を横軸に対数的にとり、縦軸に  $|f_2(y)|$  と積分  $S_2(y)$  を対数的にとった例を図 4 に示す。簡単のため  $x_{F0}=1$  とし、 $\alpha=0.01$ ,  $\nabla=0.1$  の場合を描いている。この図には、 $x_F^2$ ,  $(\alpha y)^2$  の値もともに示している。 $y$  の値は右端がゼロで、左に向かうほど大きくなり 1 に近づく。図 3 に対応して、 $y$  の増加とともに  $f_2(y)$  は 1 から増加し、 $x_F^2 = (\alpha y)^2$

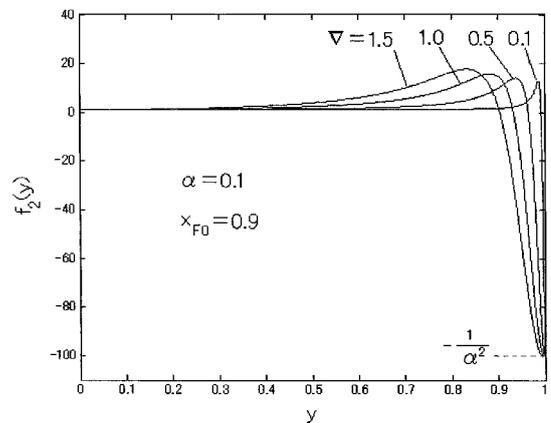


図 3 (2.17)式で与えた関数  $f_2(y)$  の  $y$  に対するプロット。 $\alpha=0.1$ ,  $x_{F0}=0.9$  で、 $\nabla=0.1 \sim 1.5$  の場合について描いている。 $x_F^2 = (\alpha y)^2$  のとき  $f_2(y)=0$  になるが、その前後で非常に大きな変化が正と負の間にわたって起こり、 $y=1$  で負の値  $-1/\alpha^2$  に達する。

の手前から減少に転じ、ゼロに急降下したあと、負の大きな値  $-1/\alpha^2$  に向かう。その絶対値  $|f_2(y)|$  は  $y \rightarrow 1$  のとき  $1/\alpha^2$  に一致する。

このように数桁にわたり大きく振幅が変わる関数  $f_2(y)$  を、 $0 \sim y$  間で積分した値  $S_2(y)$  は、 $x_F^2 = (\alpha y)^2$  の点で最大値に達し、そのあと減少して、 $y \rightarrow 1$  に近づくほど一定値に達する。この一定値が  $S_2(1)$  であり、1 よりわずかに小さい値でない  $R_2$  には一致しない。よって、正しい  $S_2(1)$  を得るためには、関数  $f_2(y)$  の最大変化を十分に反映できるほど細かく刻んだ積分を行う必要があり、 $x_F^2 = (\alpha y)^2$  の点よりも  $y \rightarrow 1$  側へ十分に寄った位置まで積分範囲をとることが求められる。

図5に、 $\alpha = 0.1, \alpha = 0.01, \alpha = 0.001$  の場合の  $(\alpha y)^2$  曲線群と、 $\nabla = 1, \nabla = 0.1, \nabla = 0.01$  の場合の  $x_F^2$  曲線群、および  $T \equiv \tan[(\pi/2)(1-y)]$  をプロットしている。ただし簡単のため  $x_{F0} = 1$  とした。この図より、 $x_F^2 = (\alpha y)^2$  を与える交点の位置が総覧できる。 $T/\nabla \ll 1$  では  $[x_F(y)/x_{F0}]^2 \approx (T/\nabla)^2$  なので、 $\nabla$  が小さいほど  $x_F^2$  の線は左側にずれる。よって、 $\alpha$  と  $\nabla$  が小さいほど、 $x_F^2 = (\alpha y)^2$  の交点はグラフ左側になるので、積分範囲をより  $y \rightarrow 1$  に近い側に広げる必要がある。

### 5. 磁界の2次微分ゼロの条件を満たすパラメータの組

$y$  を対数的に1に近づけ、積分  $S_2(y)$  を求める場合、正しい積分値  $S_2(1)$  を得るために、どこまでの  $y$  の範囲をとればよいかという問題を検討する。たとえば、 $\alpha$  と  $\nabla$  が小さい  $\alpha = 0.001, \nabla = 0.01$  の場合では、図5より、 $x_F^2 = (\alpha y)^2$  を

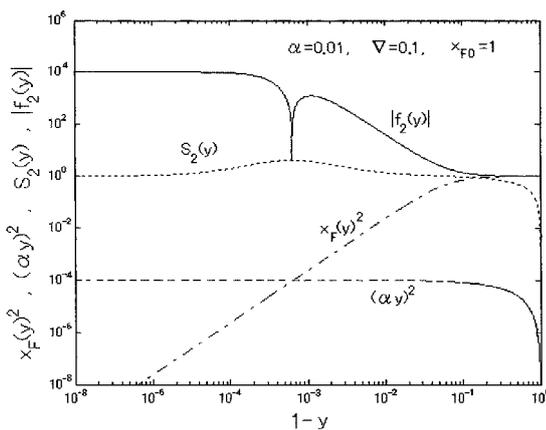


図4 横軸に  $1-y$  を対数的にとり、縦軸に  $|f_2(y)|$  と積分  $S_2(y)$  を対数的にとった例。 $x_{F0} = 1, \alpha = 0.01, \nabla = 0.1$  の場合について描いている。 $x_F^2, (\alpha y)^2$  の値も示している。数桁にわたり大きく振幅が変わる関数  $f_2(y)$  を  $0 \sim y$  間で積分した値  $S_2(y)$  は、 $x_F^2 = (\alpha y)^2$  の点で最大値に達し、そのあと減少して、 $y \rightarrow 1$  に近づくほど一定値に達する。 $x_F^2 = (\alpha y)^2$  の点よりも  $y \rightarrow 1$  側へ十分に寄った位置まで積分範囲をとる必要がある。

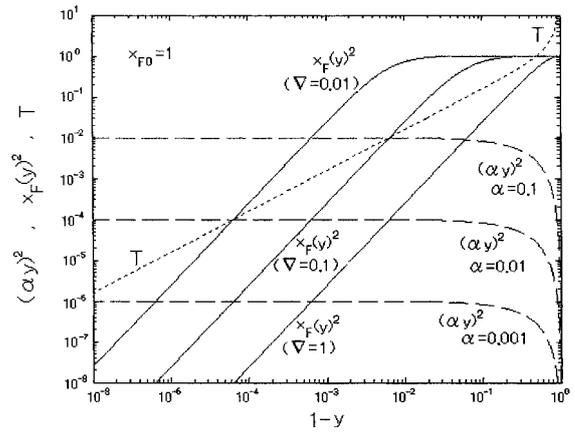


図5  $\alpha = 0.1, \alpha = 0.01, \alpha = 0.001$  の場合の  $(\alpha y)^2$  曲線群と、 $\nabla = 1, \nabla = 0.1, \nabla = 0.01$  の場合の  $x_F^2$  曲線群、および  $T \equiv \tan[(\pi/2)(1-y)]$  のプロット。 $x_{F0} = 1$  とする。 $\alpha$  と  $\nabla$  が小さいほど、 $x_F^2 = (\alpha y)^2$  の交点はグラフ左側になる。

満たす  $1-y$  の値は約  $5 \times 10^{-6}$  であるから、これよりさらに2桁程度左方までは積分範囲を確保すべきと考えられる。

この状況は  $x_{F0}$  が1に近い低磁界ほど、厳しくなるであろう。そこで、 $x_{F0}$  の種々の値に対して積分範囲を  $y = 0$  から  $y = 1 - 10^{-m}$  までとって積分  $S_2(y)$  を数値的に求め、それを条件式(2.15)の  $S_2(1)$  の代わりに使って、 $R_2 = S_2(y)$  を満たすような  $\nabla$  値を求めた。

数値計算は、 $(\alpha, x_{F0})$  を固定し、 $m$  の一つの値に対し  $\nabla$  の値を変化させ、 $1-y$  の対数1桁区間を1000個等間隔に分割した積分  $S_2(y)$  を行って、条件  $|R_2 - S_2(y)| < 10^{-10}$  を満たす  $\nabla$  値をさがす作業である。その結果を図6に示す。横軸は  $m$ 、縦軸は  $\nabla$  で、両対数目盛で表している。

図中、A, B, C の曲線群はそれぞれ  $\alpha = 0.1, \alpha = 0.01,$

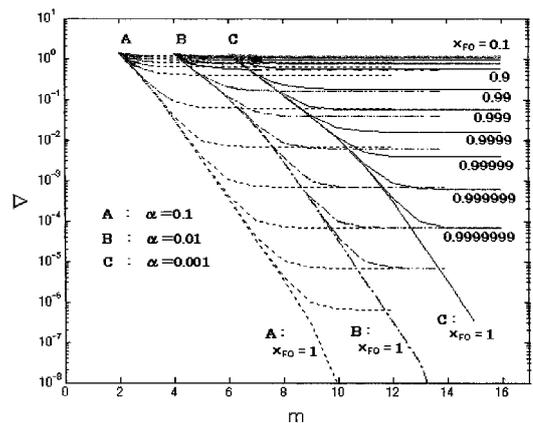


図6  $y = 0$  から  $y = 1 - 10^{-m}$  までの積分  $S_2(y)$  より得られた、 $x_{F0}$  の種々の値に対する  $\nabla$  値の  $m$  依存性。A, B, C の曲線群はそれぞれ  $\alpha = 0.1, \alpha = 0.01, \alpha = 0.001$  の場合について、各々  $x_{F0} = 0.1 \sim 1$  の16通りの  $\nabla$  を与える。 $m$  値が増大してゆくと、ある値以上で  $\nabla$  は飽和する。この飽和値  $\nabla$  を(2.15)式を満たす真の解であるとみなす。

$\alpha=0.001$  の場合の  $\nabla$  を与える。それぞれ  $x_{F0}=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, 0.999999, 0.9999999, 1$  の16通りの  $\nabla$  曲線が示されている。たとえば, C群 ( $\alpha=0.001$ ) の  $x_{F0}=1$  の場合は,  $m$  値が6から増大するにつれて右下がりに桁落ちしてゆく  $\nabla$  曲線で示されるが,  $x_{F0}=0.9999999=1-10^{-7}$  では,  $m=12$  付近から  $x_{F0}=1$  の曲線と別れ,  $m=14$  付近より大きいところでは横ばいになる。この飽和した状態の  $\nabla$  値が, 与えられた ( $\alpha, x_{F0}$ ) に対して式 (2.15) を満たす  $\nabla$  の真の解であるとみなせる。

C群では  $x_{F0}<0.9999999$  の範囲の  $x_{F0}$  に対しては,  $m=14$  よりもっと小さな  $m$  値で  $\nabla$  が飽和しているので,  $x_{F0}\leq 0.9999999$  に対して  $m=16$  とすれば十分と見なせる。同様にして, B群 ( $\alpha=0.1$ ) では  $m=14$ , A群 ( $\alpha=0.1$ ) では  $m=12$  という結論を得た。

$\alpha=0.1, 0.01, 0.001$  の場合の  $S_2(y)$  の積分範囲  $y=1$

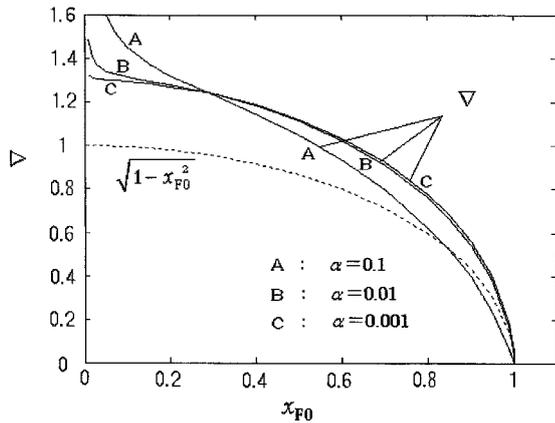


図7(a) 図6の結果より,  $\alpha=0.1, 0.01, 0.001$  の場合に  $m=12, 14, 16$  と決めて計算した(2.15)式を満たす  $\nabla$  の  $x_{F0}$  依存性。(a)図は等間隔目盛での表現。

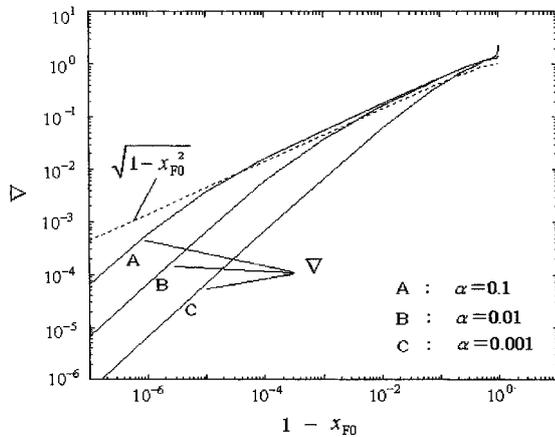


図7(b) 図6の結果より,  $\alpha=0.1, 0.01, 0.001$  の場合に  $m=12, 14, 16$  と決めて計算した(2.15)式を満たす  $\nabla$  の  $x_{F0}$  依存性。(b)図は横軸を  $1-x_{F0}$  ととり, 両対数目盛で表現してある。

$-10^{-m}$  を  $m=12, 14, 16$  として与えて得られた  $\nabla$  と  $x_{F0}$  の関係を図7(a)と図7(b)に示す。

図7(a)によると,  $x_{F0}$  が1から小さくなると  $\nabla$  は増大し,  $x_{F0}=0.3$  の付近で (3.1) 式に出てくる  $\nabla=\sqrt{3}/2$  の値に達し,  $x_{F0}<0.3$  では更に増大する。よって,  $x_{F0}<0.3$  では電流前線は平板内部へ凹む形になる。 $0.3<x_{F0}<1$  の範囲では,  $\alpha=0.001$  と  $\alpha=0.01$  の  $\nabla$  がほぼ同じで,  $\alpha=0.1$  になるとやや大きく下回る様子がわかる。図中, 一点鎖線で示している  $\sqrt{1-x_{F0}^2}$  の曲線は, (2.6) 式を満たす  $\nabla$  値で,  $\alpha\rightarrow 0$  極限での理論式だが,  $\alpha=0.001$  の数値解とは  $x_{F0}=0$  付近で1.3倍の開きがある。

図7(b)は, 横軸に  $1-x_{F0}$  を, 縦軸に  $\nabla$  を, 両対数でプロットしたものである。 $1-x_{F0}$  が小さな低磁界の場合の  $\nabla$  解の様子がわかる。 $1-x_{F0}$  が小さくなるほど,  $\alpha=0.001$  と  $\alpha=0.01$  の  $\nabla$  が分離し,  $\alpha=0.1$  の  $\nabla$  と合わせて3者が対数的に平行な直線に向かう。低磁界極限では, その直線の傾きより  $\nabla$  は  $1-x_{F0}$  に比例し, 近似的に

$$\nabla=(0.7/\alpha)(1-x_{F0}) \quad (5.1)$$

で表されるように,  $\alpha$  により1桁ずつ  $\nabla$  の値が異なる。また, 一点鎖線の曲線  $\sqrt{1-x_{F0}^2}$  は, 低磁界になるほど有効でないことがわかる。

## 6. 前線パラメータの磁界依存性

前節で得られた解の組 ( $\alpha, x_{F0}, \nabla$ ) を使って (2.12) ~ (2.14) の数値計算を行い, 規格化磁界  $h_e$  を求めた結果を図8に示す。これは  $x_{F0}$  に対する  $h_e$  の変化を示した図である。 $x_{F0}$  が1から小さくなると  $h_e$  はゆるやかに増大し,  $x_{F0}=0$  付近で急激に上昇する。 $x_{F0}\rightarrow 0$  で向かう先は, 磁界  $H_e$  が中心到達磁界  $H_p$  に等しくなるときゆえ,  $h_e=F_1(\alpha)$  であり,  $\alpha=0.1, 0.01, 0.001$  におけるその値は, それぞれ3.304, 5.605, 7.908となる。 $x_{F0}$  の全域にわたり  $\alpha=0.001$  と  $\alpha=0.01$  の  $h_e$  値がほぼ同じで,  $\alpha=0.1$  になるとやや大きく

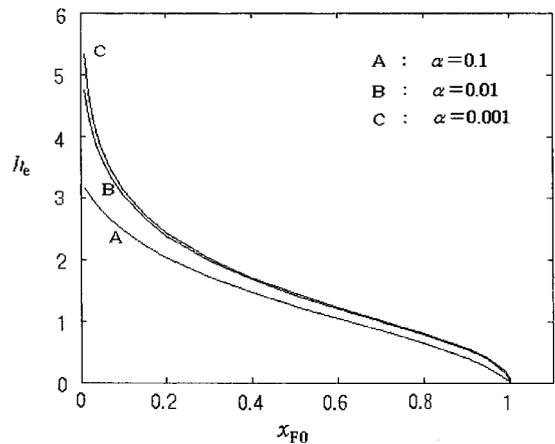


図8 解の組 ( $\alpha, x_{F0}, \nabla$ ) に対し(2.12)式から得られる規格化磁界  $x_{F0}$  の依存性。 $x_{F0}\rightarrow 0$  のとき  $h_e$  が向かう先は図1の  $F_1(\alpha)$  である。

下回る様子が見える。図7(a)と比較すると、 $x_{F0}$  に対して  $h_e$  と  $\nabla$  が似たような依存性を示していることがわかる。

得られた解の組  $(\alpha, x_{F0}, \nabla, h_e)$  より、前線パラメータ  $\nabla$  の磁界依存性を求めた結果を図9(a)と図9(b)に、 $1-x_{F0}$  の磁界依存性を求めた結果を図10(a)と図10(b)に示す。4図とも横軸に  $h_e$  を、縦軸に  $\nabla$  または  $1-x_{F0}$  を取っているが、図9(a)、図10(a)は両対数目盛なので十分低磁界までの結果を表しており、図9(b)、図10(b)は普通目盛なので、比較的高磁界領域の結果を示している。

図9(a)によると、 $\alpha=0.1$  (曲線A)、 $\alpha=0.01$  の場合 (曲線B)、 $\alpha=0.001$  の場合 (曲線C) で  $\nabla$  の違いが見られるのは  $h_e > 1.2$  の範囲だけで、 $h_e < 1.2$  ではどの  $\alpha$  でも同じ  $\nabla$  値をとる。とくに  $h_e < 0.5$  では、直線

$$\nabla = h_e \tag{6.1}$$

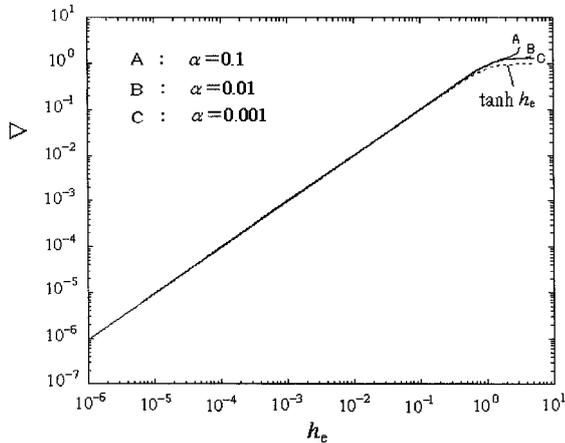


図9(a) 前線パラメータ  $\nabla$  の磁界依存性。(a)図は両対数目盛での表現で、 $h_e < 1.2$  では  $\alpha$  依存性が見られない。

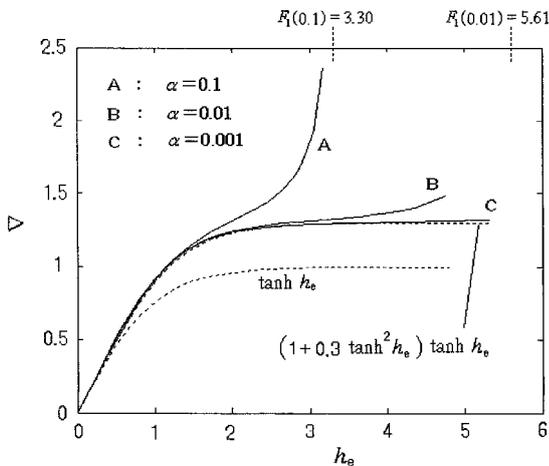


図9(b) 前線パラメータ  $\nabla$  の磁界依存性。(b)図は等間隔目盛での表現で、 $h_e < 1.2$  では  $\alpha$  依存性がでてくるのがわかる。小さな  $\alpha$  の場合、曲線Cに沿う点線が良い近似となる。

に一致する。すなわち、(2.6) 式で与えられる磁界依存性  $\nabla = \tanh h_e$  と一致する。

図9(b)より、 $h_e > 0.5$  の範囲になると、 $\nabla$  と  $\tanh h_e$  の違いが明瞭に出る。 $\alpha=0.001$  の  $\nabla$  (曲線C) はおよそ  $\tanh h_e$  の1.3倍となる。この曲線Cに適合する近似曲線として、

$$\nabla = (1 + 0.3 \tanh^2 h_e) \tanh h_e \tag{6.2}$$

が考えられる。この式の値を図9(b)の曲線Cに沿う点線で示しているが、よく合っている。(図9(a)でも描いているが、ぴったり数値計算値と合致しているため、見分けがつかない。)

$h_e > 1.5$  の範囲では、 $\nabla$  の  $\alpha$  による違いが曲線A, B, Cのように顕著に現れる。これは、 $h_e$  が中心到達磁界値  $F_1(\alpha)$  に近づけば、 $\nabla$  が急速に増大するため、 $F_1(\alpha)$  が小さな  $\alpha=0.1$  の場合は低い  $h_e$  で曲線Aが立ち上がっている。 $\alpha \rightarrow 0$  の極限では、曲線Cのような高磁界部の水平性が  $h_e = \infty$  まで保たれると考えられる。

よって、 $\alpha \rightarrow 0$  の極限では、 $h_e$  の全域にわたって、(6.2) 式で近似される  $\nabla$  が実現されると予想される。

一方、図10(a)によると、 $1-x_{F0}$  は、十分低磁界では(5.1) 式と(6.1) 式に対応した次の直線に一致するような振舞いが見られる。

$$1-x_{F0} = (\alpha/0.7) h_e \tag{6.3}$$

逆に、 $h_e$  を大きくしてゆくと、 $1-x_{F0}$  の  $\alpha$  依存性は少なくなり、ほとんど同一の曲線に収束してゆく。 $h_e > 10^{-2}$  の範囲では曲線Cが  $\tanh^2(h_e/1.65)$  の線 (点線) に一致する。

図10(b)に比較的高い磁界範囲の  $1-x_{F0}$  を示しているが、 $\alpha=0.001$  の場合 (曲線C) と  $\alpha=0.01$  の場合 (曲線B) がほぼ同じ値で変化し、 $\alpha=0.1$  の場合 (曲線A) はやや大きな値をとる。曲線Bと曲線Cがほぼ同じということは、さらに  $\alpha$  が小さくなっていっても  $1-x_{F0}$  は曲線Cにほぼ一致するとみなすことができる。

図10(b)の  $1-x_{F0}$  の  $h_e$  依存性は、おおよそ関数  $\tanh^2(h_e/\kappa)$  で近似できる。ただし  $\kappa$  の値は、 $\kappa=1.4$  ( $\alpha=0.1$ )、 $\kappa=1.6$  ( $\alpha=0.01$ )、 $\kappa=1.65$  ( $\alpha=0.001$ ) である。図10(a)の低磁界依存性(6.3) 式も考慮して、 $h_e$  の全域で、次の近似式を与えてみる。

$$1-x_{F0} = (1 - \tanh h_e) \tanh(\alpha h_e/0.7) + \tanh^2(h_e/\kappa) \tag{6.4}$$

図10(b)中の曲線A, B, C (実線) に沿う点線は(6.4) 式を表している。曲線Aでのはずれがやや大きいですが、曲線B, Cではかなりよく一致しているように見える。

一致の程度を見るために、(6.4) 式の値をグラフ横軸に、数値計算結果の  $1-x_{F0}$  を縦軸にとった結果を両対数目盛グラフ (図11(a)) と普通目盛グラフ (図11(b)) に示す。図11(a)では  $h_e$  の広範囲にわたって両者はよく一致している

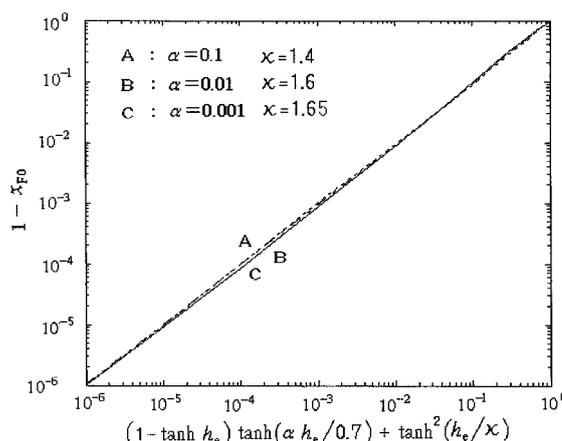
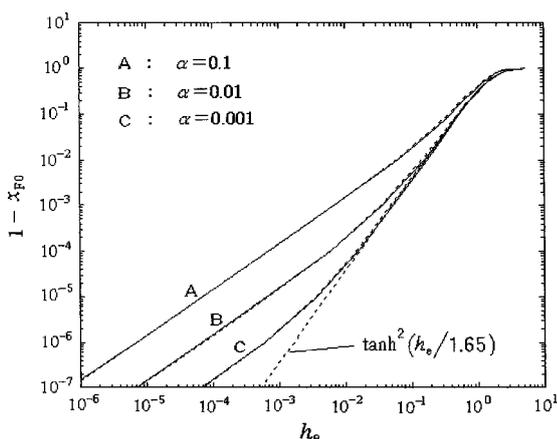


図10(a)  $1-x_{F0}$  の磁界依存性。(a)図は両対数目盛での表現で、非常に低い磁界では曲線 A, B, C が等間隔の平行直線になる。磁界を上げていくと、曲線 C は点線で示した曲線に近づく。

図11(a)  $1-x_{F0}$  の数値計算結果と、(6.4)式の近似値の一致度を示すグラフ。(a)図は両対数目盛での表現。

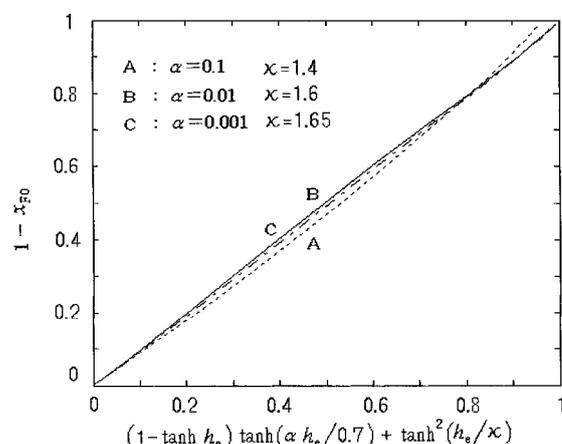
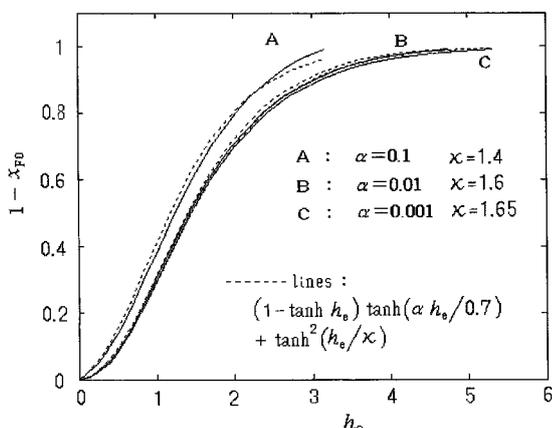


図10(b)  $1-x_{F0}$  の磁界依存性。(b)図は等間隔目盛での表現で、高い磁界領域では3曲線とも似たような変化を示し、特に曲線 B と C はほぼ一致する。点線は近似曲線である。

図11(b)  $1-x_{F0}$  の数値計算結果と、(6.4)式の近似値の一致度を示すグラフ。(b)図は等間隔目盛での表現。誤差は5%以内である。

ことが示されている。図11(b)では、 $h_e=0.5$  付近の曲線 A のふくらみがめだつが、それも5%以内の誤差である。よって、(6.4)式は  $\alpha$  が小さいほど有効な近似式であるが、 $\alpha=0.1$  の場合でも5%以内の誤差で使えるということがわかる。

$1-x_{F0}$  は  $x$  軸上の電流層幅を  $D_x$  で規格化した量であり、 $x$  軸上で平板端からの磁束侵入幅を与える。図10(a)(b)の結果より、同じ磁界  $h_e$  に対しては、 $\alpha$  の小さい薄板の方が  $1-x_{F0}$  は小さく、磁束侵入幅の割合が小さいという結果になった。

しかし、 $\alpha$  の異なる板を比べるとき、互いの中心到達磁界  $H_p$  が異なることを考慮し、外部磁界  $H_e$  を  $H_p$  で規格化して、グラフ横軸を  $H_e/H_p$  で表してみると、図12のようになった。すなわち、図10(b)とは逆に  $\alpha$  が小さいほど  $1-x_{F0}$  曲線は大きくなる。よって、 $H_e$  を  $H_p$  で規格化した磁界と比較すると、 $x$  軸上の平板端からの磁束侵入幅割合は、 $\alpha$  が

小さいほど大きいという結論になる。これは比較的厚い平板の場合に、幅を固定して厚みを変化させた場合の前線侵入結果<sup>4)</sup>と一致する。

## 7. まとめ

電流前線のパラメータ ( $\nabla, x_{F0}$ ) は、規格化磁界  $h_e$  と逆アスペクト比  $\alpha$  に対して次のような依存性を示す。但し、 $\alpha$  の調査範囲は 0.1~0.001 である。

(1)  $\nabla$  は、 $h_e < 1.5$  ならば、 $\alpha \leq 0.1$  の範囲で  $\alpha$  によらず、近似式

$$\nabla = (1 + 0.3 \tanh^2 h_e) \tanh h_e \quad (7.1)$$

で表せる。非常に小さな  $h_e$  の範囲では(7.1)式は  $\nabla = h_e$  となる。一方、 $h_e > 1.5$  ならば、 $h_e$  が  $F_1(\alpha)$  に近づくにつれ、磁束の中心到達状態に近くなり、 $\nabla$  は近似式(7.1)の値より

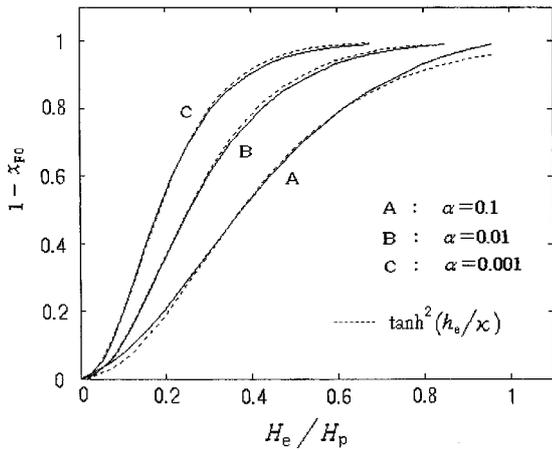


図12 図10(b)の横軸を  $H_e/H_p$  に取り替えたグラフ。図10(b)に比べ、 $1-x_{F0}$  の曲線 A, B, C の大きき順が逆になっている。中心到達磁界で規格化すると、 $\alpha$  の小さい薄板のほうがより内部へ磁束侵入が起こることになる。

急速に増大する。 $\alpha \rightarrow 0$  の極限では  $h_e$  の全域にわたり (7.1) が成り立つと予想される。

(2)  $1-x_{F0}$  は、 $h_e$  の全域で近似式

$$1-x_{F0} = (1-\tanh h_e) \tanh(\alpha h_e/0.7) + \tanh^2(h_e/\kappa) \quad (7.2)$$

により表せる。 $\alpha$  が小さいほど近似の精度が上がるが、 $\alpha = 0.1$  の場合でも 5% 以内の誤差で使える。十分低磁界では (7.2) 式の第 1 項が主項になり、直線

$$1-x_{F0} = (\alpha/0.7) h_e \quad (7.3)$$

で近似できる。逆に、 $h_e$  を大きくすると  $\alpha$  依存性は少なくなり、(7.2) 式の第 2 項

$$1-x_{F0} = \tanh^2(h_e/\kappa) \quad (7.4)$$

で近似的に表される。ただし  $\kappa$  の値は、 $\kappa = 1.4$  ( $\alpha = 0.1$ )、 $\kappa = 1.6$  ( $\alpha = 0.01$ )、 $\kappa = 1.65$  ( $\alpha = 0.001$ ) であり、 $\alpha$  による (7.4) の値の相違はあまり大きくない。

### 参考文献

- 1) 野田 稔：福岡工業大学研究論集，第35巻，第 2 号 (2003) 225-230
- 2) 野田 稔：福岡工業大学研究論集，第36巻，第 2 号 (2004) 193-199
- 3) 野田 稔：福岡工業大学研究論集，第37巻，第 2 号 (2005) 177-183
- 4) 野田 稔：福岡工業大学研究論集，第38巻，第 2 号 (2006) 153-160

- 5) Brandt E H and Indenbom M: Phys. Rev. **B48** (1993) 12893-12906
- 6) K. Yamafuji, M. Noda, T. Fujiyoshi: Res. Bull. Fukuoka Inst. Tech. **40** (2008) 199-208
- 7) Cybernet. co.