Title	スプライン補間による画像の引き伸ばし
Author(s)	加藤　友彦
Citation	福岡工業大学研究論集　第40巻第2号　P263-P266
Issue Date	2008-2
URI	http://hdl.handle.net/11478/947
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	Publisher

スプライン補間による画像の引き伸ばし

加藤友彦（電子情報工学科）
村田真司（電子情報工学科）

Enlargement of Digital Photograph by Spline Interpolation

Tomohiko KATO (Department of Information Electronics)
Shinji MURATA (Department of Information Electronics)

Abstract

A spline interpolation method is applied to enlargement of digital photographs. The conventional method of the linear interpolation is useful at least for several times enlargements. In larger scale enlargements, however, a smooth image cannot be expected by the linear interpolation. In this paper, the natural cubic spline functions are employed with an ingenuous algorism based on the LU factorization for tridiagonal matrices. An eight times enlarged photograph obtained by the spline method is compared with that provided by the linear method and one observes that the former image has better quality than the latter one. It is expected that such advantage of the spline method becomes more illustrative in the case of larger scale enlargements.

Keywords: *enlargement of photograph, large scale enlarging, spline interpolation, linear interpolation, LU factorization,*

１．序

画素の少ない画像を引き伸ばすと不鮮明な画像になる。鮮明に引き伸ばすためには，画像データを補間する必要がある。通常用いられる補間法は，線形補間である。この方法は原理が簡単であるため処理時間が少なく，通常の数倍程度の拡大には十分耐えられるものである。しかし，線形補間はセルとセルの境界で強度値の勾配が連続でないため，10倍あるいは50倍程の大きな拡大の場合にはその欠点が表れてくるであろう。

本論文では，このような大きな拡大が必要な特別の場合に対応できる方法としてスプライン補間を取り上げ,実際の画像に適用し線形補間との優劣を検討する。

平成19年10月31日受付

２．スプライン補間およびアルゴリズム

＜原理＞

この研究では，３次の自然スプラインを採用する。この方式ではスプライン方程式は，以下の条件を満たすように決められる。

S1．$S(x)$ は x 座標が $[x_{j-1},\ x_j]$ の各区間において定義される３次関数であり，$(x_{j-1},\ y_{j-1})$，$(x_j,\ y_j)$ を通る。$(j=2,\ 3,\ \cdots n)$

S2．$s'(x)$，$s''(x)$ は $x_1 \leq x \leq x_n$ において連続である。

S3．$s''(x_1)=s''(x_n)=0$

この関数は与えられたデータ $\{(x_i,\ y_i)\}$ をなめらか

に補間する。上記の 3 条件が，$(n-1)$ 個の 3 次方程式の係数 $4(n-1)$ 個の係数を決めるのに必要十分であることを示しておく：

・各方程式が両端を通ることより

$2(n-1)$

・各データ点で $s'(x_i)$，$s''(x_i)$ が連続であることより

$2(n-2)$

あわせて，$4n-6$ と 2 つ条件が足りないことになるが，s3 の自然スプラインの条件 2 つを加えることにより，$4(n-1)$ 個の方程式が与えられる。

＜スプライン関数を求める簡明なアルゴリズム＞

文献(1)に記されているアルゴリズムを紹介する。

x_j 各点における 2 回微分を M_j とおく。

$$M_j \equiv s''(x_j)\ (j=2,\ 3,\ \cdots n) \tag{3.1}$$

未知数 M_j を用いて，$s(x)$ を表現する。$s(x)$ は $[x_{j-1},\ x_j]$ それぞれの区間において 3 次式なので，その関数 $s''(x)$ は 1 次式となる。1 次関数は 2 点によって決まる。

$$s''(x_{j-1})=M_{j-1},\ \ s''(x_j)=M_j$$

であるので，

$$s''(x)=\frac{(x_j-x)M_{j-1}+(x-x_{j-1})M_j}{x_j-x_{j-1}}$$

$$x_{j-1}\leq x\leq x_j \tag{3.2}$$

となる。これを 2 度積分し， 2 つの不定常数を下記の 2 つの条件で決める。

$$s(x_{j-1})=y_{j-1},\ \ s(x_j)=y_j$$

簡単な計算の後に下記の 3 次多項式を得る。

$$s(x)=\frac{(x_j-x)^3M_{j-1}+(x-x_{j-1})^3M_j}{6(x_j-x_{j-1})}$$
$$+\frac{(x_j-x)y_{j-1}+(x-x_{j-1})y_j}{x_j-x_{j-1}}$$
$$-\frac{(x_j-x_{j-1})[(x_j-x)M_{j-1}+(x-x_{j-1})M_j]}{6}$$

$$(j=2,\ 3,\ \cdots n) \tag{3.3}$$

ここで残された条件“$s'(x)$ が各 x_j で連続”を用いることにより，下記のように M_j についての連立方程式が得られる。

$$\frac{x_j-x_{j-1}}{6}M_{j-1}+\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{3}M_j+\frac{x_{j+1}-x_j}{6}M_{j+1}$$
$$=\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{j+1}-x_j}-\frac{y_j-y_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}$$
$$(j=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1) \tag{3.4}$$

これらの $n-2$ 個の方程式，および仮定（S3）

$$M_1=M_n=0 \tag{3.5}$$

によって、M_2，M_3，$\cdots M_{n-1}$ が求められる。

1 次連立方程式の系(3.4)，係数行列が三項対角の形をしている。この系は LU 分解によって大容量を要する行列計算をすることなく簡単に解けることが知られている。

＜三項対角行列の LU 分解＞

係数行列 A が三項対角行列の場合には，以下のような極めて簡単なアルゴリズムが可能となる。

$$A=\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & \\ \cdots & & & & & \\ \cdots & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

これを，下に示す 2 つの行列 L と U の積に分解する。

$A=LU$

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & \cdots & 1 & \alpha_n & 1 \end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix} \beta_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ \cdots & & & \beta_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & \beta_n \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

とおく。両辺の各行列要素を等しくおくことにより，以下の等式が得られる。

$\beta_1 = b_1$

$\alpha_2\beta_1 = a_2 \;\; \alpha_2 c_1 + \beta_2 = b_2$

$\alpha_j\beta_{j-1} = a_j$

$\alpha_j c_{j-1} + \beta_j = b_j$

$(j=2,\ 3,\ \cdots n) \qquad (3.8)$

方程式(3.8)から α_j，β_j は簡単に求められる。

$\beta_1 = b_1$

$\alpha_j = a_j / \beta_{j-1}$

$\beta_j = b_j - a_j c_{j-1}$

$(j=2,\ 3,\ \cdots n) \qquad (3.9)$

方程式系 $Ax=f$ を解くためには二組の三項対角の方程式を解けばよいことになる。

$Lg=f \qquad Ux=g$

$Lg=f$ から，以下のように g_j が求められる。

$g_1 = f_1$

$g_j = f_1 - \alpha_j g_{j-1}$

$(j=2,\ 3,\ \cdots n) \qquad (3.10)$

次に，$Ux=g$ から以下のように x_j が求められる。

$x_n = g_n / \beta_n$

$x_j = (g_j - c_j x_{j+1}) / \beta_j$

$(j=2,\ 3,\ \cdots n-1) \qquad (3.11)$

以上の計算は $(5n-4)$ 回の乗法と除法で計算できる。

このアルゴリズムをC＃を用いてプログラミングした。

3．実際の画像による線形補間とスプライン補間の比較

実際の画像で，スプライン補間による拡大図を作成し，線形補間の図と比較する。原画像は簡単のため64×48ピクセルのものを選んだ。図1に原画像とそれをそのまま8倍に拡大した図を示す。この程度の拡大で，タイル状の不連続が目につく。

図2に線形補間により8倍に拡大した図を示す。それなりに滑らかな画像となっている。

スプライン補間では，まず横軸64点の補間を48ラインについて行い，それを用いて，縦軸64×8ラインについて補間を行う。あわせて，560回の補間を行い，(64×8)×(48×8) 点の RGB 強度（0～255）を与える。図3にその結果の図を示す。花びらやつぼみの部分をよく見ると，スプライン補間を用いた画像の方が線形補間の画像よりも滑らかに引き延ばしが行われていることが分かる。

次に，図2と図3の違いを視覚的に比較しやすいように Photoshop でグレースケール化し，輪郭検出を行った画像を図4と図5に示す。この2つの図を比較すれば，スプライン補間の画像の優位がより明らかに分かるであろう。

原画像

原画像

図1　原画像とそのまま8倍に拡大した図

Fig. 1　Original photograph and eight times enlarged photograph without any treatment

図2　線形補間による拡大図

Fig. 2　Enlarged photograph by linear interpolation

図３　スプライン補間にる拡大図
Fig. 3　Enlarged photograph by spline interpolation

図４　図２に対して Photoshop で輪郭検出を行った画像
Fig. 4　Outline figure of Fig. 2 by a treatment of PhotoShop

４．結論と今後の課題

前節で示したように，８倍程度の拡大でスプライン補間の方が線形補間よりも滑らかな画像を与えることが分かったが，その差は僅かであり，計算時間の差を考えれば一概にスプライン補間が有利であるとは言えない。しかし，拡大率が20倍程度以上となればその差は歴然とするであろう。従って，数倍程度の通常の拡大の場合は，線形補間で十分であり，スプライン補間は極めて大きな拡大率が必要とされる特別な場合に利用されるものであろう。

詳しく見れば，２つの補間の優劣は画像のタイプにもよることが分かる。それは，線形補間は，エッジの部分には強いが,連続的に変化している部分には弱い。

図５　図３に対して Photoshop で輪郭検出を行った画像
Fig. 5　Outline figure of Fig. 3 by a treatment of PhotoShop

逆にスプライン補間は，連続的に変化している部分ではいくらでも拡大できるが，エッジの部分の不連続をきちっと表現することができない。このことから，画像の引き伸ばしを全面的にきれいに行うにはエッジの部分には線形補間を採用し，その他の部分にはスプライン補間を採用すれば良いと考えられる。今後の課題としては，あらかじめエッジ検出をして，線形補間をする部分とスプライン補間をする部分を分けて，画像の引き伸ばしを行うプログラムを作る必要がある。

この研究を遂行するにあたって，盧存偉教授，長元気博士から画像処理の技術について種々教授していただいたことを厚く感謝する。

なお，この研究は，加藤研究室における過去の卒業研究の経験と成果に基づいて達成されたものであることを付記する：

平成15年度　丸川貴彦氏，浦　直史氏
平成16年度　上本剛史氏，三浦健太氏
平成17年度　下川拓也氏

文　　献

⑴　K. Atkinson “Elements of numerical analysis”（John Wiley & Sons）