

福岡工業大学 機関リポジトリ

FITREPO

Title	球面上の保測写像の対称性と周期倍分岐
Author(s)	時田 正彦
Citation	福岡工業大学研究論集 第40巻第2号 P255-P262
Issue Date	2008-2
URI	http://hdl.handle.net/11478/945
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	Publisher

Fukuoka Institute of Technology

球面上の保測写像の対称性と周期倍分岐

川 畑 茂 徳 (電子情報工学科)
時 田 正 彦 (電子情報工学科)

Symmetry and Period Doubling in Area-Preserving Map of the Sphere

Shigetoku KAWABATA (Department of Information Electronics)

Masahiko TOKITA (Department of Information Electronics)

Abstract

Previously, We have studied some dynamics that lead to the reversible area-preserving map of a sphere onto itself. In this paper the problem of the period doubling in symmetric, area-preserving map is investigated. Our interest is mainly in generalized symmetry properties of the map. We will rebuild dynamical systems theory from the ground up in the symmetry context, so it is hoped that if there are new phenomena that occur in the dynamics of the symmetric map, such phenomena will be visible. Nature of the symmetry can be stated succinctly as: the map is the product of two involutions. Note also that the map is Z_2 -equivariant, where Z_2 is the cyclic group of order 2 with action $(x, y, z) \rightarrow (x, -y, -z)$.

Keywords: *area-preserving, periodic doubling, symmetric map, involution*

1 序論

我々は古典力学系としてパルス外場を摂動として加えた場合の核四重極子の運動を考察してきた^{3,4)}。

考察する運動方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -yz \\ \frac{dy}{dt} &= zx + Kz \sum_m \delta(t - mT) \\ \frac{dz}{dt} &= -Ky \sum_m \delta(t - mT) \end{aligned} \quad (1)$$

である。ここで T と K はパルス外場の周期と強度パラメータである。

この方程式は変換 $(x, y, z, t) \rightarrow (x, -y, -z, t + T)$ の下で対称である。以下では、この対称性が方程式の解に大きな影響を与えることを示す。物理系を記述する常微分方程式系をパルス外場の周期に関して積分することによって、直接、付随する3次元逐次写像 (Poincaré map) がえられる。非線形方程式系の周期解を、Poincaré 断面上で考えると周期解は固定点になることを使うと、周期解の分岐を調べることができる。このためには、流れの固定点と Poincaré 断面の固定点が全く同じ分岐を示すかということが問題であるが、Floquet の定理^{1,2)}によって Poincaré 断面上の線形安定性を容易に解析できる⁴⁾。

系のパラメータを変化させると、非カオス-カオス間の転位が起こる。この論文では熊手型分岐分岐を通してカオスへいたる道すじを、系の満たす対称性をもとに考察する。

2 Poincaré Map の対称性

運動方程式に付随する Poincaré map は解析的に求められることはまれで、数値計算によって求められる。これに対し、パルス形の摂動のある核四重極子の場合には解析的に構成できる。Poincaré 断面上の点から点への運動は元々の相空間での運動と位相的に同等である。例えば、非線形方程式系の周期解を、Poincaré 断面上で考えると周期解は固定点になることを使うと、周期解の分岐を調べることができる

2.1 同変写像

常微分方程式系

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) \quad (2)$$

がある群の作用の下で対称であることを、次のように定義する

定義 2.1 Γ が \mathbf{R}^n 上に作用し、 $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n$ とする。全ての $\gamma \in \Gamma$ 、 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して $\mathbf{f}(\gamma\mathbf{x}, a) = \gamma\mathbf{f}(\mathbf{x}, a)$ ならば、 \mathbf{f} は Γ 同変 (equivariant) である。

常微分方程式(1)は変換 $(x, y, z, t) \rightarrow (x, -y, -z, t+T)$ の下で対称である。 $\mathbf{Z}_2 = \{e, \sigma\}$ とおく。ここで $\sigma : (x, y, z) \rightarrow (x, -y, -z)$ 、 e は単位元で、 $\sigma^2 = e$ である。このとき Poincaré map P は \mathbf{Z}_2 同変である。写像 P の \mathbf{Z}_2 同変性によって熊手型分岐が生じる。

2.2 非線形写像の対称性

運動方程式をパルス外場の周期に関して積分することによってえられる非線形写像

$$P : (x_n, y_n, z_n) \rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$$

は2つの写像演算子の積 QR に分解することができる。ここで演算子 R は、

$$\mathbf{x}'_n = R(\mathbf{x}_n) \quad (3)$$

で定義される線形演算子で、その行列表現は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 - (\frac{1}{2}K)^2}{1 + (\frac{1}{2}K)^2} & \frac{K}{1 + (\frac{1}{2}K)^2} \\ 0 & \frac{-K}{1 + (\frac{1}{2}K)^2} & \frac{1 - (\frac{1}{2}K)^2}{1 + (\frac{1}{2}K)^2} \end{pmatrix} \quad (4)$$

であり、この行列式の値は、 $\det[R] = 1$ である。ここでベクトル \mathbf{x}_n 、 \mathbf{x}'_n はそれぞれ (x_n, y_n, z_n) 、 (x'_n, y'_n, z'_n) である。Jacobian の値は、

$$\frac{\partial(x'_n, y'_n, z'_n)}{\partial(x_n, y_n, z_n)} = 1 \quad (5)$$

である。

$$\cos \theta_R = \frac{1 - (\frac{1}{2}K)^2}{1 + (\frac{1}{2}K)^2} \quad (6)$$

$$\sin \theta_R = \frac{K}{1 + (\frac{1}{2}K)^2} \quad (7)$$

演算子 Q は、 $\mathbf{x}_{n+1} = Q(\mathbf{x}'_n)$ で、次のように定義される非線形演算子である。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x'_n \cos(z'_n T) - y'_n \sin(z'_n T) \\ y_{n+1} &= x'_n \sin(z'_n T) + y'_n \cos(z'_n T) \\ z_{n+1} &= z'_n \end{aligned} \quad (8)$$

Q は角度 $\theta_Q = z'_n T$ だけベクトル \mathbf{x}'_n を z 軸の周りに回転する非線形演算子である。Jacobian の値は、

$$\det T_Q(\mathbf{x}'_n) = \frac{\partial(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})}{\partial(x'_n, y'_n, z'_n)} = 1 \quad (9)$$

である。

単位球面は P の軌道に沿って不変であるので、

$$\|\mathbf{x}_n\|^2 = \|\mathbf{x}'_n\|^2 = \|\mathbf{x}_{n+1}\|^2 = 1 \quad (10)$$

が成立する。

P 写像が2つの包含変換 I_1 と I_2 の積に分解されることが本質的である：

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_R & \sin \theta_R \\ 0 & \sin \theta_R & -\cos \theta_R \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$I_2 = QR I_1. \quad (12)$$

次の式は簡単に確かめられる。

$$I_1^2=1, \quad (13)$$

$$I_2^2=1, \quad (14)$$

ここで $I^2=1$ (恒等写像) を満足する変換あるいは写像を包含写像(involution)という。包含変写像 I_1 と I_2 の不動点の曲線を考察することによって興味深い展望が開かれる。2つの包含写像の積に分解される写像は Birkhoff によって研究され、特に Greene⁹⁾等によって、面積を保存する写像族の周期倍分岐の研究がなされた。さらに I_1, I_2 はその Jacobian が負であることから鏡映写像 (reflection) とも呼ばれる。鏡映写像は系の対称性を表す。

さらに P 写像は2つの包含写像 J_1 と J_2 の積に分解される：

$$P=J_2J_1, \quad (15)$$

ここで J_1 と J_2 次式で定義される。

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_R + \pi) & \sin(\theta_R + \pi) \\ 0 & \sin(\theta_R + \pi) & -\cos(\theta_R + \pi) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$J_2 = QRJ_1. \quad (17)$$

ここで、包含写像 I_1, I_2, J_1, J_2 の不動点の曲線を導入する：

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\mathbf{x} \in S^2 \mid I_1\mathbf{x} = \mathbf{x}\} \\ &= \{(x, y, z) \in S^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = y \tan \theta_R/2\}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \{\mathbf{x} \in S^2 \mid I_2\mathbf{x} = \mathbf{x}\} \\ &= \{(x, y, z) \in S^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = 0\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} C_3 &= \{\mathbf{x} \in S^2 \mid J_1\mathbf{x} = \mathbf{x}\} \\ &= \{(x, y, z) \in S^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ &\quad y = -z \tan \theta_R/2\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} C_4 &= \{\mathbf{x} \in S^2 \mid J_2\mathbf{x} = \mathbf{x}\} \\ &= \{(x, y, z) \in S^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, y = x \tan(zT/2)\}. \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、曲線 C_1 は $\theta_R \rightarrow \theta_R + \pi$ により曲線 C_3 に変換されることに注意する。

次の補題は包含写像 J_1, J_2 と Z_2 との関係を示す。

補題 2.1

$J_1\mathbf{x} = \sigma\mathbf{x}$ と $J_2\mathbf{x} = \sigma\mathbf{x}$ の解はそれぞれ、包含写像 I_1, I_2 の不動点の曲線 C_1, C_2 と一致する。

また曲線 C_4 をパラメータ表示しておくのが便利である：

$$x = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2\theta}{T}\right)^2} \cos \theta, \quad (22a)$$

$$y = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2\theta}{T}\right)^2} \sin \theta, \quad (22b)$$

$$z = \frac{2\theta}{T}, \quad (22c)$$

$$-\frac{T}{2} \leq \theta \leq \frac{T}{2}.$$

ここで C_1, C_2 と C_3 は単位球 S^2 の大円 (great circle) である。

I_1 と I_2 は、簡単な計算により鏡映写像であることが分かる。同様にして J_1 と J_2 も鏡映写像である。

点 $\mathbf{x}^* = I_1\mathbf{x} \in S^2$ は鏡 C_1 に関する \mathbf{x} の鏡映点であるという。すべての $\mathbf{x} \in S^2$ に対して $(P\mathbf{x})^* = I_1P\mathbf{x} = I_1I_2I_1\mathbf{x} = I_1I_2\mathbf{x}^* = P^{-1}\mathbf{x}^*$ となることに注意する。また $(P^n\mathbf{x})^* = P^{-n}\mathbf{x}^*, n \in \mathbf{N}$ が成り立つ。軌道 $\{P^n\mathbf{x} \mid n \in \mathbf{N}\}$ と $\{P^{-n}\mathbf{x}^* \mid n \in \mathbf{N}\}$ は C_1 を鏡とする互いに鏡映な軌道になっている。 I_1 によってつくられた鏡映ダイナミックスの対称性は非常に興味深いものである。

同様にして、点 $\mathbf{x}_* = J_1\mathbf{x} \in S^2$ は鏡 C_3 に関する \mathbf{x} の鏡映点である。軌道 $\{P^n\mathbf{x} \mid n \in \mathbf{N}\}$ と $\{P^{-n}\mathbf{x}_* \mid n \in \mathbf{N}\}$ は C_3 を鏡とする互いに鏡映な軌道になっている。 $\mathbf{x} \in S^2$ に対して C_2, C_4 を鏡とする鏡映点も同様にして定義される。

2.3 不変部分空間

不変部分空間は分岐が起こる空間として重要である。

定義 2.2 $\gamma V = V, \forall \gamma \in \Gamma$ のとき、 $V \subseteq \mathbf{R}^n$ を Γ 不変部分空間 (invariant subspace) という。

S^2 上の不変部分空間の例として球面 S^2 と曲線 $C_i (i=1, 2, 3, 4)$ がある。すなわち

$$V = C_i (i=1, 2, 3, 4)$$

は S^2 上で \mathbf{Z}_2 不変である。写像 P は \mathbf{Z}_2 同変であるから P^n の固定点を曲線 $C_i (i=1, 2, 3, 4)$ 上で探すのは合理的である。

3 軌道の対称性

写像の対称性を用いることによって、不動点の集合を出発点とする軌道の振る舞いを調べることができる。 $\mathbf{x}_0 \in C_4$ のとき、軌道を $\mathfrak{A} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} P^n \mathbf{x}_0$ と表す。軌道は次の性質を満たす。

定理 3.1

軌道は写像 P, J_1, J_2 の不変集合である。

J_2 の定義より、 $J_2 \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ となるので、

$$J_2 \mathfrak{A} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} J_2 P^n \mathbf{x}_0 = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} P^{-n} J_2 \mathbf{x}_0 = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} P^{-n} \mathbf{x}_0 = \mathfrak{A} \quad (2)$$

が成り立つ。よって、軌道 \mathfrak{A} は J_2 の不変集合である。また、 $P \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ より $J_1 \mathfrak{A} = J_2 \mathfrak{A}$ なので、 \mathfrak{A} は J_1 の不変集合でもある。

軌道 \mathfrak{A} が σ 不変であるかどうか調べよう。 $P^n \mathbf{x}_0 (n = 0 \sim 10^5)$ をプロットして数値実験を行った。

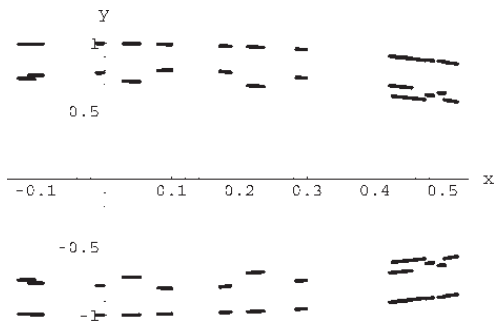


図1：軌道の x - y 平面への射影

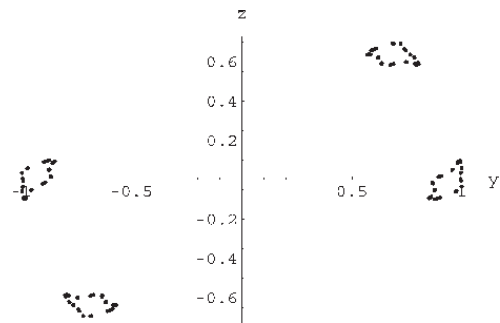


図2：軌道の y - z 平面への射影

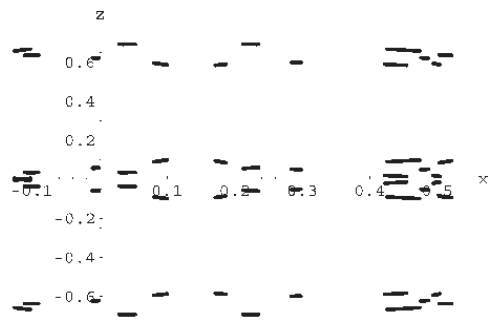


図3：軌道の x - z 平面への射影

図1～3が示す軌道は σ 不変性を示している、と思われる。一方図4、図5が示す軌道は明らかに σ 対称でない。

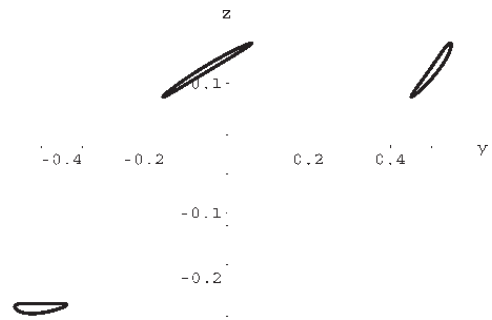


図4：軌道の y - z 平面への射影

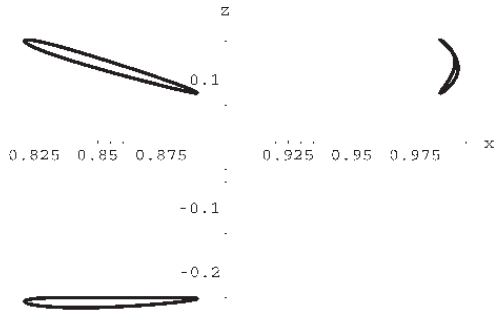


図5：軌道の x - z 平面への射影

$\mathbf{x}_0 \in C_4$ を出発点とする軌道の振る舞いを σ 不変な軌道について調べる必要がある。

4 固定点, 周期点

いま初期値 $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^3$ を満たす式

$$\mathbf{x}_{n+1} = P(\mathbf{x}_n) \tag{24}$$

の解を

$$\mathbf{x}_n = \Phi(n, \mathbf{x}_0) \tag{25}$$

と書くことにする。こうすると

$$\mathbf{x}_n = P^n(\mathbf{x}_0) = \Phi(n, \mathbf{x}_0)$$

である。

非線形演算子 P の固定点 \mathbf{x} を

$$\mathbf{x} = P(\mathbf{x}) \tag{26}$$

で定義する。また点 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ が $\mathbf{x} = P^2(\mathbf{x}) = P(P(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq P(\mathbf{x})$ を満たすとき, この点を2-周期点という。 k -周期点も同様に定義される。

写像 P の持つ鏡映ダイナミクスから P の固定点は J_1 と J_2 の固定点の集合である曲線 C_3 と C_4 の交点に存在する。

定理 4.1

非線形写像 P が固定点を持つなら, それらは $C_3 \cap C_4$ 上になければならない。ただし, これは $K \rightarrow \infty$ の場合も成立する。

証明

$K \neq 0$ とする。定義から

$$x'_n = x_n \tag{27}$$

$$y'_n = y_n \cos \theta_R + z_n \sin \theta_R \tag{28}$$

$$z'_n = -y_n \sin \theta_R + z_n \cos \theta_R \tag{29}$$

$$x_n = x_{n+1} = x'_n \cos(z'_n T) - y'_n \sin(z'_n T) \tag{30}$$

$$y_n = y_{n+1} = x'_n \sin(z'_n T) - y'_n \cos(z'_n T) \tag{31}$$

$$z_n = z_{n+1} = z'_n \tag{32}$$

パラメータ θ_R は演算子 R , パラメータ T は演算子 Q のみに影響を与えることが本質である。最初の3式から $z_n(1 - \cos \theta_R) = -y_n \sin \theta_R$ あるいは $y_n = -z_n \tan \theta_R / 2$ が導かれる。これより y_n, z_n は C_3 上に存在する。同様にして残りの3式から $y_n \sin(z_n T) = x_n(1 - \cos(z_n T))$ あるいは $y_n = z_n \tan(z_n T / 2)$ が導かれる。これより y_n, x_n, z_n は C_4 上に存在する。したがって $C_3 \cap C_4$ 上になければならない。

2-周期点については特殊な条件の場合について解析解が求まっている。 Q は角度 $\theta_Q = z'_n T$ だけベクトル \mathbf{x}'_n を z 軸の周りに回転する非線形演算子であるから, $z'_n + z'_{n+1} = \pm 2n\pi/T$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ を満たす解を考えればよい。このとき $\sin(z_n T) = 0$, $\cos(z_n T) = 1$ となることが証明できる。そこで簡単のために $n=0, \pm 1$ の場合を考えると, 2-周期点の満たす方程式は簡単に解くことができる。つまり

定理 4.2

$$\begin{aligned} x &= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 \frac{2}{1 + \cos \theta_R}} \\ y &= \mp \frac{\pi}{T} \frac{\sin \theta_R}{1 + \cos \theta_R} \\ z &= \pm \frac{\pi}{T} \end{aligned} \tag{33}$$

または

$$\begin{aligned} x &= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 \frac{2}{1 - \cos \theta_R}} \\ y &= \pm \frac{\pi}{T} \frac{\sin \theta_R}{1 - \cos \theta_R} \\ z &= \pm \frac{\pi}{T} \end{aligned} \tag{34}$$

は非線形演算子 P の 2-周期点である。ただし、 $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$ を満たす K, T に限る。

式(33)は $\theta_R \rightarrow \theta_R + \pi$ により式(34)に変換されることに注意する。また、式(33)と式(34)はそれぞれ I_1 と J_1 の固定点の曲線 C_1 と C_3 をパラメータ表示したものである。

C_1 と C_3 上にない $\mathbf{x} \in S^2$ の C_1 と C_3 を鏡とする鏡映点をそれぞれ $\mathbf{x}^* = I_1 \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_* = J_1 \mathbf{x}$ とおく。このとき次の定理が成立する。

定理 4.3

$\mathbf{x} \in S^2$ が n -周期点ならば、 \mathbf{x}^* , \mathbf{x}_* も n -周期点である。

証明

$\mathbf{x} = P^n \mathbf{x}$ とする。 $\mathbf{x}^* = (P^n \mathbf{x})^* = P^{-n} \mathbf{x}^*$ であるから、 $P^n \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*$ 。

次の補題は重要である。

補題 4.1

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $P^n J_1 P^n = J_1$, $P^n J_2 P^n = J_2$

この補題から周期点に関する種々の結果が得られる。例えば

定理 4.4

1. \mathbf{x} , $P^n \mathbf{x} \in C_3 \implies \mathbf{x}$ は $2n$ -周期点である。
2. \mathbf{x} , $P^n \mathbf{x} \in C_4 \implies \mathbf{x}$ は $2n$ -周期点である。
3. $\mathbf{x} \in C_4$, $P^n \mathbf{x} \in C_3 \implies \mathbf{x}$ は $(2n-1)$ -周期点である。
4. $\mathbf{x} \in C_3$, $P^n \mathbf{x} \in C_4 \implies \mathbf{x}$ は $(2n-1)$ -周期点である。

実際 $\mathbf{x} = (0.1963235939026445405, \pm 0.7304696012720206013, \pm 0.6541186498599812509)$ は $\mathbf{x} \in C_4$, $P^2 \mathbf{x} \in C_4$ を満たし、4-周期点である。また $\mathbf{x} = (-0.1015210125587679107, \pm 0.3001569993357309015, \pm 0.9484720658821811209)$ は $\mathbf{x} \in C_4$, $P^3 \mathbf{x} \in C_3$ を満たし、5-周期点である。

この定理の逆が成り立つことに注意する。

定理 4.5

ある $k > 0$ に対して $\mathbf{x} \in C_4$ で \mathbf{x} が k -周期点ならば、 k が偶数のとき $P^{k/2} \mathbf{x} \in C_4$ である。また k が奇数ならば $P^{(k+1)/2} \mathbf{x} \in C_3$ である。

証明

k が偶数のとき証明する。仮定から $\mathbf{x} = J_2 \mathbf{x} = P^k \mathbf{x}$ 。従って $J_2 \mathbf{x} = P^{k/2} P^{k/2} \mathbf{x}$ より $P^{-k/2} J_2 \mathbf{x} = P^{k/2} \mathbf{x}$ 。両辺に J_2 を作用させて $J_2 P^{-n} J_2 = P^n$ に注意すると、 $J_2 P^{k/2} \mathbf{x} = J_2 P^{-k/2} J_2 \mathbf{x} = P^{k/2} \mathbf{x}$ 。

これら二つの定理から、偶数次の周期点は C_3 または C_4 上に 2 個の点が存在することが分かる。これに対して奇数次の周期点は C_3 と C_4 上にそれぞれ 1 個の点が存在する。

4.1 周期点の安定性

最初に自明な固定点 $\mathbf{a}_\pm = (\pm 1, 0, 0)$ の安定性について考察する。写像 P の導関数を計算するために

$$x' = x \tag{35}$$

$$y' = y \cos \theta_R + z \sin \theta_R \tag{36}$$

$$z' = -y \sin \theta_R + z \cos \theta_R \tag{37}$$

$$f_1 = x' \cos(z' T) - y' \sin(z' T) \tag{38}$$

$$f_2 = x' \sin(z' T) + y' \cos(z' T) \tag{39}$$

$$f_3 = z' \tag{40}$$

とおくと、Jacobi 行列は合成関数の微分公式より

$$DP(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x'} & \frac{\partial f_1}{\partial y'} & \frac{\partial f_1}{\partial z'} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x'} & \frac{\partial f_2}{\partial y'} & \frac{\partial f_2}{\partial z'} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x'} & \frac{\partial f_3}{\partial y'} & \frac{\partial f_3}{\partial z'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_R & \sin \theta_R \\ 0 & -\sin \theta_R & \cos \theta_R \end{pmatrix} \tag{41}$$

である。ベクトル関数 $(f_1, f_2, f_3)^t$ の \mathbf{x}' に関する微分は

$$\begin{pmatrix} \cos(z' T) & -\sin(z' T) & -x' T \sin(z' T) - y' T \cos(z' T) \\ \sin(z' T) & \cos(z' T) & x' T \cos(z' T) - y' T \sin(z' T) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。式(34)を $\mathbf{x}_{2\pm}$ とおくと $\mathbf{x}_{2+} = P(\mathbf{x}_{2-})$, $\mathbf{x}_{2-} = P(\mathbf{x}_{2+})$ が成り立つ。さらにこの式を用いて $DP^2(\mathbf{x}_{2-}) = DP(\mathbf{x}_{2+})DP(\mathbf{x}_{2-})$ 等を計算できる。 P の導関数は Floquet 行列とも呼ばれる。行列の固有値は周期解の安定性を決める。Floquet 行列は常に固有値 1 をもっていることに注意する。この固有値は周期解の安定性に関係ない。以後残りの固有値のみについて記す。

簡単な計算により次の結果をえる。

定理 4.6

1. \mathbf{a}_- は $T = \frac{2(1 - \cos \theta_R)}{\sin \theta_R}$ のとき不安定になる。 $\lambda_1 = \lambda_2 = +1$ で saddle-node 分岐が起こる。 $(K, T) = (4.0, 4.0)$ がその例である。
2. \mathbf{a}_+ は $T = \frac{2(1 + \cos \theta_R)}{\sin \theta_R}$ のとき不安定になる。 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ で周期倍分岐 (熊手型分岐) が起こる。 $(K, T) = (4.0, 1.0)$ がその例である。

写像 P の 2-周期点の安定性を議論する前に Logistic 写像 $x_{n+1} = f(x_n) = ax_n(1 - x_n)$ の 2 周期点の安定性について考える。2-周期点は簡単に計算でき x_{2+} と x_{2-} で

$$x_{2+} = f(x_{2-}) = f_2(x_{2+}) \quad (42)$$

$$x_{2-} = f(x_{2+}) = f_2(x_{2-}) \quad (43)$$

を満たす。ここに $f_2(x) = f(f(x))$ とおいた。この固定点の安定性は $f_2(x)$ の導関数 $f_2'(x_{2-}) = f'(x_{2+})f'(x_{2-}) = f'(x_{2-})f'(x_{2+}) = f_2'(x_{2+})$ の値の絶対値によって決まる。上の式から 2-周期点 x_{2+} , x_{2-} の安定性は分岐パラメータの同じ値に対して同時にきまる。2-周期点は同時に不安定になるので、それぞれに対して新たな固定点が 2 つ現れるので、2-周期点の運動が不安定になると周期 3 の運動が現れるのではなく 4-周期点が現れる。この議論では導関数の積 $f'(x_{2+})f'(x_{2-}) = f'(x_{2-})f'(x_{2+})$ が可換であることが本質である。

一方写像 P の場合は導関数は Jacobi 行列となるから導関数の積は可換にならない。しかし、導関数の積 $D^2P(\mathbf{x}_{2-}) = DP(\mathbf{x}_{2+})DP(\mathbf{x}_{2-}) \neq DP(\mathbf{x}_{2-})DP(\mathbf{x}_{2+}) = D^2P(\mathbf{x}_{2+})$ すなわち Jacobi 行列の積は可換ではないがその固有方程式は一致し、固有値も一致する。従って、式(34)で定義される 2-周期点 \mathbf{x}_{2+} , \mathbf{x}_{2-} の安定性は Logistic 写像の場合と同じように分岐パラメータの同じ値に対して同時にきまる。2-周期点は同時に不安定になるので、それぞれに対して新たな固定点が 2 つ現れるので、2-周期点の運動が不安定になると周期 3 の運動が現れるのではなく 4-周期点が現れる。すなわち 2 周期点不安定になると写像 P の \mathbf{Z}_2 同変性によって熊手型分岐が生じる。実際以下のことが成り立つ。

定理 4.7

\mathbf{x}_0 を P^n の固定点 $P^n \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ とする。点

$$P\mathbf{x}_0, P^2\mathbf{x}_0, \dots, P^{n-1}\mathbf{x}_0$$

もまた、 P^n の固定点である。このとき、これら周期 n の n 個の固定点の安定性は分岐パラメータの同じ値に対して同時に決まる。

証明

各点における Jacobi 行列 A は 3 次であるから、その固有方程式は

$$\lambda^3 - \text{Tr}(A)\lambda^2 + (\det(A_{11}) + \det(A_{22}) + \det(A_{33}))\lambda - \det(A) = 0 \quad (44)$$

である。ここで $\det(A_{ii})$ は小行列式である。 $\lambda = 1$ が常に解であることに注意すれば、 $\text{Tr}(A)$ と $\det(A)$ が一致すれば同じ固有方程式をもつことになる。簡単のために $n=3$ の場合を考える。 $\mathbf{x}_2 = P(\mathbf{x}_1)$, $\mathbf{x}_3 = P(\mathbf{x}_2)$, $\mathbf{x}_1 = P(\mathbf{x}_3)$ とおく。各点 \mathbf{x}_i での行列 $DP^3(\mathbf{x}_i)$ の行列式は 3 つの行列式の積であるから等しい。トレースに関しては

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_3) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}_2) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}_1)$$

において、3 つの和の順序交換が可能であることに注意すれよい。

式(34)を $\mathbf{x}_{2\pm}$ とおくと $\mathbf{x}_{2+} = P(\mathbf{x}_{2-})$, $\mathbf{x}_{2-} = P(\mathbf{x}_{2+})$ が成り立つ。このとき

定理 4.8

$\mathbf{x}_{2\pm}$ における Jacobi 行列 $DP^2(\mathbf{x}_{2\pm})$ の固有方程式は

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda(-2 + T^2 x_0^2 \sin^2 \theta_R) + 1) = 0$$

である。ここで $x_0^2 = 1 - \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 \frac{2}{1 - \cos \theta_R}$ 。従って、周期 2 の軌道は

$$\left(T^2 - \frac{2\pi^2}{1 - \cos \theta_R}\right) \sin^2 \theta_R = 4$$

を満たす (T, K) で $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ と周期倍分岐を起こす。 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ の分岐は生じない。

参考文献

- [1] P. Bergé, Y. Pomeau and C. Vidal, “Order within chaos”, John Wiley & Sons, 1986. (P.ベルジェ, Y.ポモウ, C.ビダル「カオスの中の秩序」相澤洋二訳, 産業図書, 1992)
- [2] G. Floquet, Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, Ann. École Norm. ser. 2, **12** (1883) 47-89
- [3] Tokita M, Kawabata S. Dynamics of Classical quadrupole moment I, Chaos, Solitons and Fractals 13 (2002) 997-1015
- [4] Kawabata S, Tokita M. Dynamics of Classical quadrupole moment II, Chaos, Solitons and Fractals 13 (2002) 1017-1030
- [5] Greene J.M, MacKay R.S., Feigenbaum. Universal Behaviour in families of area-preserving maps, Physics 3D (1981) 468-486