

福岡工業大学 機関リポジトリ

FITREPO

Title	垂直磁界中の超伝導平板におけるベクトルポテンシャル分布
Author(s)	野田稔
Citation	福岡工業大学研究論集 第38巻第2号 P153-P160
Issue Date	2006-2
URI	http://hdl.handle.net/11478/832
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Fukuoka Institute of Technology

垂直磁界中の超伝導平板におけるベクトルポテンシャル分布

野 田 稔 (電子情報工学科)

**Distribution of Vector Potential in a Superconducting Plate
under a Perpendicular Magnetic Field**

Minoru NODA (Department of Information Electronics)

Abstract

A shielded region in a superconducting plate under a perpendicular magnetic field is surrounded by two regions of current flowing in opposite directions each other. This front configuration can be well approximated by a curve similar to a parabola, but having a power of the n th order. In this study, vector potentials produced by these currents are calculated in the space including the superconducting plate. The equipotential value gives a visual determination of the flux line distribution, from which we can estimate a shielding effect near or inside the current front. For example, adopting appropriate parameters of the n th power curve, we can find a flux line flowing very closely to the front curve. The potential value corresponding with the flux line is about 0.1% of the external filed potential. Distribution of the potential inside the shielded regions is then examined precisely. As a result, it is found that any shielded potential inside the front curve can be suppressed to below 0.1% of the external filed potential.

Key words: *Superconducting plate, perpendicular field, shielding current front, nth order curve, vector potential, flux line distribution*

1. はじめに

紙面垂直方向に無限に伸びた幅 $2a$ 、厚み $2d_s$ の超伝導平板に対し、平板面に垂直な磁界 H_e が印加されたとき、図1(a)に示すような遮蔽電流が左右逆向きに流れ、平板中心部を磁氣的に遮蔽する。遮蔽電流領域と被遮蔽領域の境界を電流前線と呼び、これを n 次曲線

$$x_B(y) = \pm(a_1 - C|y|^n) \quad (1.1)$$

(n は実数)で表したとき、被遮蔽領域内 x 軸上の磁界の遮蔽誤差(自乗平均値)は0.6%以内であることを前報¹⁾で示した。しかし、 x 軸以外の点、特に近似した電流前線の付近での遮蔽度はどうなっているのかについては、課題として残された。

真の電流前線は磁束前線と一致しなければいけないが、電流前線を n 次曲線で与えた場合は、両者にずれが生じる。その誤差は遮蔽度と対応する。被遮蔽領域内外での磁界分布を調べるには、磁束流線を描くと把握しやすい。1本の磁束流線はベクトルポテンシャルが一定の値を持つ点の集合として与えられる。本研究では、磁束前線と電流前線の一致度を調べることを

目的とし、ベクトルポテンシャル計算と磁束流線描画を行った結果について述べる。この計算と描画のために、MATLAB²⁾を用いた。

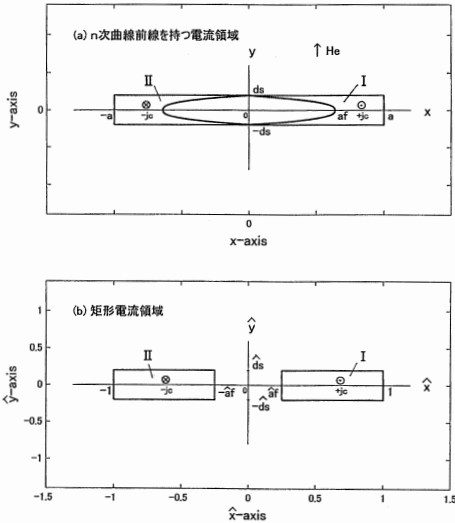


図1 (a)幅 $2a$ 、厚み $2d_s$ の超伝導平板断面と、内部の電流前線形状。 y 軸正方向に外部磁界 H_e が印加され、平板内電流領域は右側Ⅰが手前向きの電流、左側Ⅱが奥向きの電流で、どちらも一様な電流密度 j_c を持つ。本稿では、電流前線を n 次曲線で表している。(b)電流領域を矩形で表した図。この図では長さを a で規格化した量を $\hat{}$ で表している。

2. 条件設定とベクトルポテンシャル

図1 (a)のように、 y 軸正方向の一様な外部磁界 H_e 中にある導体平板 ($-a \leq x \leq a$, $-d_s \leq y \leq d_s$) の内側で紙面に垂直な方向に遮蔽電流が流れている。右側の電流領域Ⅰ ($x_B(y) \leq x \leq a$) では手前向きに、左側の電流領域Ⅱ ($-a \leq x \leq -x_B(y)$) では奥向きに、それぞれ一様な電流密度 j_c で流れている。図1 (a)の設定では、電流分布は y 軸に関して反対称、もしくは原点に関して反対称といえる。

この系の任意の点 $P(x,y)$ におけるベクトルポテンシャル $A_t(x,y)$ は、外部磁界の寄与分 $A_e(x)$ と遮蔽電流の寄与分 $A_j(x,y)$ の和であり、次式で表せる。

$$A_t(x,y) = A_e(x) + A_j(x,y) \quad (2.1)$$

ここに、 $A_e(x)$ は次式のように x のみの関数となる。

$$A_e(x) = -\mu H_e x \quad (2.2)$$

一方、遮蔽電流の寄与分 $A_j(x,y)$ は次の方法で求める。一般に、紙面に垂直な無限長電流 $+I$ 、 $-I$ からの距離 r_+ 、 r_- の点において、電流対により作られるベクトルポテンシャル A_1 は、 $A_1 = (\mu I / 2\pi) \log(r_- / r_+)$ で与えられる。 μ は媒質の透磁率である。そこで、図1 (a)中の電流分布がつくる任意の点 $P(x,y)$ におけるベクトルポテンシャル $A_j(x,y)$ は、電流領域Ⅰ内の点 (x',y') における電流要素 $j_c dx' dy'$ と、原点对称点 $(-x',-y')$ における電流要素 $-j_c dx' dy'$ との寄与をセットにして電流領域Ⅰ内で積分すれば得られ、次のようになる。

$$A_j(x,y) = \frac{\mu j_c}{4\pi} \int_{-d_s}^{d_s} dy' \int_{x_B(y')}^a dx' \log \left(\frac{(x'+x)^2 + (y'+y)^2}{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} \right) \quad (2.3)$$

以下の議論では、長さの次元をもつ量を a で割って規格化し、 $\hat{}$ 付きの変数で表す。

$$\left. \begin{aligned} \hat{d}_s &\equiv d_s/a, \quad \hat{a}_t \equiv a/a, \\ \hat{x} &\equiv x/a, \quad \hat{y} \equiv y/a, \quad \hat{x}' \equiv x'/a, \quad \hat{y}' \equiv y'/a \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

対応して、(1.1)式は次のように表せる。

$$\hat{x}_B(\hat{y}) = \pm (\hat{a}_t - C_n \cdot |\hat{y}|^n); \quad C_n \equiv C \cdot a^{n-1} \quad (2.5)$$

また、ベクトルポテンシャルは $(1/4\pi)\mu j_c a^2$ で割って規格化し、 $\hat{}$ 付きの変数で表す。

$$\hat{A}_j(\hat{x},\hat{y}) = \frac{A_j(x,y)}{(1/4\pi)\mu j_c a^2} = \int_{-\hat{d}_s}^{\hat{d}_s} d\hat{y}' \int_{\hat{x}_B(\hat{y}')}^1 d\hat{x}' \log \left(\frac{(\hat{x}'+\hat{x})^2 + (\hat{y}'+\hat{y})^2}{(\hat{x}'-\hat{x})^2 + (\hat{y}'-\hat{y})^2} \right) \quad (2.6)$$

$$\hat{A}_e(\hat{x}) \equiv A_e(x) / (1/4\pi)\mu j_c a^2 = -4\pi (H_e / j_c a) \hat{x} \quad (2.7)$$

$$\hat{A}_t(\hat{x},\hat{y}) = \hat{A}_e(\hat{x}) + \hat{A}_j(\hat{x},\hat{y}) \quad (2.8)$$

次に、(2.6)式を \hat{x}' について積分した結果は次のように表せる。

$$\hat{A}_j(\hat{x},\hat{y}) = \int_{-\hat{d}_s}^{\hat{d}_s} d\hat{y}' \{ U(\hat{x},\hat{y}; 1,\hat{y}') - U(\hat{x},\hat{y}; \hat{x}_B(\hat{y}'),\hat{y}') \} \quad (2.9)$$

ここに、関数 $U(\hat{x},\hat{y}; \hat{x}_B(\hat{y}'),\hat{y}')$ は次式で定義している。
 $U(\hat{x},\hat{y}; \hat{x}_B(\hat{y}'),\hat{y}')$

$$\begin{aligned} &= (\hat{x}' + \hat{x}) \log((\hat{x}' + \hat{x})^2 + (\hat{y}' + \hat{y})^2) + 2|\hat{y}' + \hat{y}| \arctan\left(\frac{\hat{x}' + \hat{x}}{|\hat{y}' + \hat{y}|}\right) \\ &- (\hat{x}' - \hat{x}) \log((\hat{x}' - \hat{x})^2 + (\hat{y}' - \hat{y})^2) - 2|\hat{y}' - \hat{y}| \arctan\left(\frac{\hat{x}' - \hat{x}}{|\hat{y}' - \hat{y}|}\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

3. 矩形電流分布が作るベクトルポテンシャル

(2.9) 式右辺の \hat{y}' についての積分は、電流前線の形 $\hat{x}_B(\hat{y}')$ を与えて実行する必要があるが、一般的にこの積分結果は解析的な式では表せない。唯一、解析式が得られるのは、(2.5) 式にて係数 $C_n = 0$ の場合、すなわち $\hat{x}_B(\hat{y}') = \hat{a}_i$ で、電流領域が矩形になる場合だけである。

そこで、矩形の電流領域の場合について、ポテンシャルの解析式の値と、数値積分の値とを比較し、両者の相違が無視しうるレベルになる数値積分の条件、すなわち数値積分の区分数を定めよう。

図1(b)のように、矩形電流領域 I ($\hat{a}_i \leq \hat{x} \leq 1$) には一様な手前向きの電流が流れ、矩形電流領域 II ($-1 \leq \hat{x} \leq -\hat{a}_i$) には一様な奥向きの電流が流れているとき、この矩形電流対によるベクトルポテンシャル $\hat{A}_j(\hat{x}, \hat{y})$ は、第1象限 ($\hat{x} \geq 0, \hat{y} \geq 0$) の範囲内で、付録A1の式 (A.1) ~ (A.7) に示すように長い表記で与えられる。

第2, 3, 4象限のベクトルポテンシャル A_2, A_3, A_4 は、電流分布の反対称性により求められ、第1象限の $\hat{A}_j(\hat{x}, \hat{y})$ を用いて次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{A}_2 &= -\hat{A}_j(-\hat{x}, \hat{y}), \quad \hat{A}_3 = -\hat{A}_j(-\hat{x}, -\hat{y}), \\ \hat{A}_4 &= \hat{A}_j(\hat{x}, -\hat{y}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

例として、電流領域パラメータを $\hat{a}_s = d_s/a = 0.2$, $\hat{a}_i = a_i/a = 0.25$ とし、付録A1の解析式 (A.5) と (3.1) 式を使って求めた \hat{x} 軸上のポテンシャルをプロットすると、図2(a)のようになる。電流領域内部の点 $\hat{x} = 0.75$ と -0.75 に、高さ約1.1のポテンシャルの山と谷があり、その間隙中央部ではポテンシャルが大体直線的に変化しているから、この付近にかなり一様な磁界が作られていることがわかる。

一方、(2.9) 式右辺の \hat{y}' 積分を数値計算で行ったとすると、積分範囲 $-\hat{d}_s \leq \hat{y}' \leq \hat{d}_s$ の区分数 md をどの程度に見積もれば良いか調べた結果を図2(b)に示す。これは MATLAB の台形積分関数 `trapz` を用いた場合に、区分数 md を 10, 20, 40, . . . , 200 と変えて積分した結果のポテンシャル値 $\hat{A}_j(\text{numerical})$ と解

析式値 $\hat{A}_j(\text{analytical})$ との差を示したグラフである。最も荒い $md=10$ の場合で、約 1×10^{-3} であり、 $md=40$ 以上では 10^{-4} 未満となることがわかる。さらに細かく $md=100$ とすると、約 1×10^{-5} という結果を得たので、以後の計算では、数値積分の区分数として $md=100$ を採用することにした。

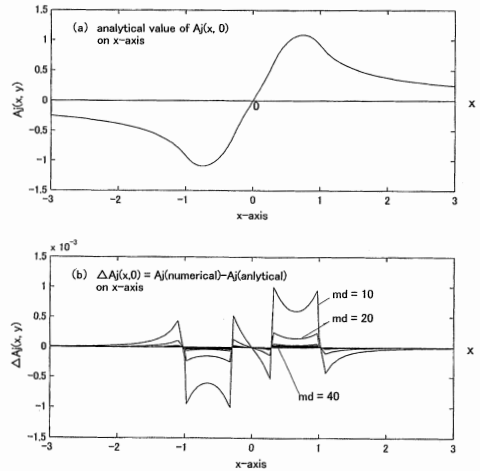


図2 (a) 図1(b)の矩形電流領域対が作る \hat{x} 軸上のポテンシャルを解析式 (A.5) から求めてプロットしたもの。(b) \hat{x} 軸上のポテンシャルの数値計算値 $\hat{A}_j(\text{numerical})$ と解析式値 $\hat{A}_j(\text{analytical})$ の差を示したグラフ。 md は数値積分範囲 $-\hat{d}_s \leq \hat{y} \leq \hat{d}_s$ の区分数。なお、図2では MATLAB 図出力の制約上、長さ量とポテンシャル量に規格化符号 \wedge が付いていないが、数値はすべて規格化値である。以降の図も同じ扱いとなる。

4. n次曲線前線の電流分布が作るベクトルポテンシャル

図1(a)の電流前線を (2.5) 式のように n 次曲線と与え、(2.9) 式右辺の \hat{y}' 積分を数値計算で行う。 $C_n = 0$ とすれば矩形領域に一致することより、数値積分の区分数 $md=100$ とし、数値計算の信頼性を確保する。

数値計算例として、前報¹⁾が取り扱った低磁界の一例である $H_e = 0.1jca$ の場合を採用する。すなわち、

$$H_e/jca = 0.1 \quad (4.1)$$

とする。すると、(2.7) 式より、

$$\hat{A}_e(\hat{x}) = -(0.4\pi)\hat{x} \quad (4.2)$$

が与えられる。次に、アスペクト比 $a/d_s = 5$ (逆アスペクト比 $\hat{d}_s = 0.2$) とする。前報¹⁾の計算結果によって、最も \hat{x} 軸上の遮蔽度が高くなる電流領域パラメータは、前報の表 1 にまとめられており、比 $a/d_s = 5$ ($\hat{d}_s = 0.2$) の場合、次の数値セットが与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{d}_s &= 0.2, \quad \hat{a}_l = 0.63909, \quad C_n = 50.015, \\ n &= 2.6913 \end{aligned} \quad (4.3)$$

ポテンシャルの計算範囲は $-3 \leq \hat{x} \leq 3$, $-3 \leq \hat{y} \leq 3$ とする。この範囲で \hat{x} 方向、 \hat{y} 方向とも重みをつけて 120 個に区分した。 $(\hat{x}$ 方向は $-1 \leq \hat{x} \leq 1$ 内を 80 個に、その外側をそれぞれ 20 個ずつに区分した。同様に \hat{y} 方向は $-2\hat{d}_s \leq \hat{y} \leq 2\hat{d}_s$ 内を 80 個に、その外側をそれぞれ 20 個ずつに区分した。)

この計算範囲内における 121×121 の (\hat{x}, \hat{y}) メッシュ座標点上で、(2.9) 式から求められたポテンシャル値 $\hat{A}_j(\hat{x}, \hat{y})$ をグラフ化した結果を図 3 に示す。これは、図 1 (a) の電流分布が作るポテンシャル $\hat{A}_j(\hat{x}, \hat{y})$ を曲面

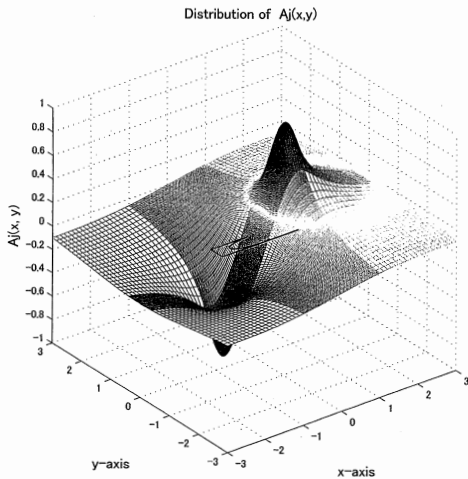


図 3 図 1 (a) の n 次曲線前線を持つ電流分布が作るポテンシャル $\hat{A}_j(\hat{x}, \hat{y})$ を曲面として表した 3D グラフ。 \hat{x} 方向観測範囲 $-3 \leq \hat{x} \leq 3$ のうち、 $-1 \leq \hat{x} \leq 1$ 内を 80 個に、その外側をそれぞれ 20 個ずつに区分。 \hat{y} 方向観測範囲 $-3 \leq \hat{y} \leq 3$ のうち、 $-2\hat{d}_s \leq \hat{y} \leq 2\hat{d}_s$ 内を 80 個に、その外側をそれぞれ 20 個ずつに区分。全体で 121×121 の (\hat{x}, \hat{y}) メッシュ座標を与え、ポテンシャルを数値計算した。中央部に電流前線が描かれた平板の一部が描かれている。

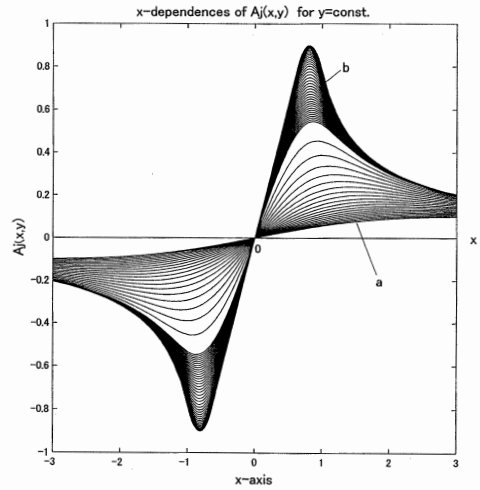


図 4 図 3 の $\hat{A}_j(\hat{x}, \hat{y})$ 曲面を \hat{y} 軸方向から眺めて \hat{x} 依存性を表現したものの。曲面を \hat{y} 値が一定となる切口で表したときの曲線群が 61 本描かれている。最大のピークを持つ曲線は \hat{x} 軸上 ($\hat{y} = 0$) のポテンシャル $\hat{A}_j(\hat{x}, 0)$ であり、ピーク値は $\hat{A}_j = \pm 0.9$ となる。 $\hat{A}_j(\hat{x}, 0)$ 曲線は領域 $-\hat{a}_l \leq \hat{x} \leq \hat{a}_l$ 間 ($\hat{a}_l \approx 0.64$) でほぼ完全な直線である。

として表した 3D グラフである。中央部に電流前線が描かれた平板の一部が描かれている。

この曲面を \hat{y} 軸方向から眺めて \hat{x} 依存性を明瞭に表現したのが、図 4 である。 $\hat{A}_j(\hat{x}, \hat{y})$ 曲面を \hat{y} 値が一定となる切口で表したときの曲線群が 61 本描かれている。一番緩やかに変化する右上がり曲線 a が、 $\hat{y} = \pm 3 = \pm 15\hat{d}_s$ でのポテンシャル $\hat{A}_j(\hat{x}, \pm 3)$ を示している。一方、一番大きな振幅で変化する曲線 b は、 \hat{x} 軸上 ($\hat{y} = 0$) のポテンシャル $\hat{A}_j(\hat{x}, 0)$ であり、矩形領域の場合の図 2 (a) に相当する。ポテンシャルの山と谷は $\hat{x} = \pm 0.8$ の位置にあり、値は $\hat{A}_j = \pm 0.9$ と見積もられる。また、領域 $-\hat{a}_l \leq \hat{x} \leq \hat{a}_l$ 間 ($\hat{a}_l \approx 0.64$) での $\hat{A}_j(\hat{x}, 0)$ が非常にきれいな直線になっていることがわかる。

図 3 の結果より、ポテンシャル $\hat{A}_j(\hat{x}, \hat{y})$ の同一値をもつ点を結ぶ曲線を MATLAB の contour 関数で描いた結果を図 5 に示す。31 本の等間隔ポテンシャル曲線群 (磁束流線図) が、 $-1.5 \leq \hat{x} \leq 1.5$ および $-1.0 \leq \hat{y} \leq 1.0$ の範囲内で描かれている。

電流領域内部の点 $(\hat{x}, \hat{y}) = (\pm 0.8, 0)$ で、ポテンシャルの山と谷に対応した渦の中心が見える。電流前線で囲まれた被遮蔽領域の内部は、きれいに揃った \hat{y} 方向

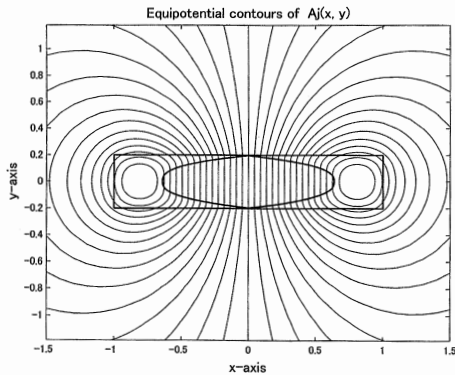


図5 図3のポテンシャル $\hat{A}_j(x, y)$ の等高線を与える31本の磁束流線図。二つの渦の中心は図4のピーク $\hat{A}_j = \pm 0.9$ に対応する。電流前線内部領域は、 y 方向の平行線群で間隔が一定である。

の平行線群であり、互いの間隔も一定である。これは、 $-\hat{a}_1 \leq \hat{x} \leq \hat{a}_1$ 間のポテンシャル $\hat{A}_j(x, 0)$ が非常にきれいな直線変化をしていることに対応しており、 n 次曲線境界の電流分布が作る被遮蔽領域内の磁界が極めて一様な状態になることを示している。

5. 超伝導平板空間の総合ベクトルポテンシャル

図1(a)の超伝導平板内外におけるベクトルポテンシャル $\hat{A}_t(x, y)$ は、(2.1)式で与えられるように、外部磁界の寄与分 $\hat{A}_e(x)$ と遮蔽電流の寄与分 $\hat{A}_j(x, y)$ の和である。そこで、図3の数値積分値 $\hat{A}_j(x, y)$ に(4.2)式の $\hat{A}_e(x)$ を加えた結果を図6に示す。

図6は、図4と同様に、 (\hat{x}, \hat{y}) メッシュ座標上の $\hat{A}_t(x, y)$ 曲面を y 軸方向から眺めることで、 \hat{x} 依存性を明瞭に表現したものである。中央部に濃い水平線が描かれているが、これが平板の \hat{x} 範囲を表す。

左上端の値 $\hat{A}_t \approx 0.36$ から右下端の値 $\hat{A}_t \approx -0.36$ にかけて直線的に落ちる線 a は、 $\hat{y} = \pm 3 = \pm 15\hat{a}_2$ でのポテンシャル $\hat{A}_t(x, \pm 3)$ を表す。これは、平板から遠い位置なので、電流の寄与は小さく、外部磁界の寄与分 $\hat{A}_e(x)$ に強く支配されるため、(4.2)式に対応した直線に近くなる。

中央部で平板に沿って水平になる曲線 b が、 \hat{x} 軸上($\hat{y} = 0$)のポテンシャル $\hat{A}_t(x, 0)$ である。平板内で、 \hat{x} 軸上の被遮蔽領域 $-\hat{a}_1 \leq \hat{x} \leq \hat{a}_1$ 間では、総合ポテンシャルがほぼ零になることがわかる。

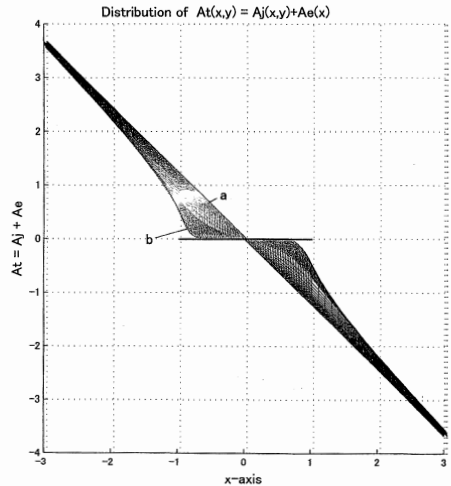


図6 図1(a)の超伝導平板空間において、外部磁界と遮蔽電流の双方が作る総合のベクトルポテンシャル $\hat{A}_t(x, y)$ 曲面を、 y 軸方向から眺めて \hat{x} 依存性を表現したもの。中央部の濃い水平線は平板の \hat{x} 範囲。線 a は $\hat{A}_t(x, \pm 3)$ を、線 b は $\hat{A}_t(x, 0)$ を表す。

6. 超伝導平板空間の磁束流線図

総合ポテンシャル $\hat{A}_t(x, y)$ の同一値をもつ点を結ぶ曲線を MATLAB の contour 関数で描いた結果を図7に示す。図6に示すように、計算範囲 $-3 \leq \hat{x} \leq 3$ 内では \hat{A}_t が -3.6 から 3.6 の値をとるが、この間で120本の等間隔ポテンシャル曲線群(磁束流線)を与えるよう設定した。図7は $-1.5 \leq \hat{x} \leq 1.5$ および $-1.0 \leq \hat{y} \leq 1.0$ の範囲に限定しているので、26本の磁束流線が表示されている。隣接する線のポテンシャル差は約 $3.6 \times 2 / (120 - 1) = 0.0605$ となる。中央部に書かれた文字 a, b の左右に13本ずつ ($\hat{A}_t = 0.75625 \sim 0.03025$ と、 $\hat{A}_t = -0.03025 \sim -0.75625$) 描かれた線が contour 関数で求めた結果である。

電流前線を這う磁束流線は理論的にはポテンシャル零である。 \hat{A}_t を限りなく零に近づけていったとき、その磁束流線が n 次曲線近似の電流前線に一致するか否かが、本稿の課題である。そこで、 $\hat{A}_t = 0.03025$ と $\hat{A}_t = -0.03025$ の磁束流線よりもっと $\hat{A}_t = 0$ の側を調べなければいけない。

図7中に書かれた文字 a, b の内側を通る細かい線群が描かれている。これらは太線で示した n 次曲線電

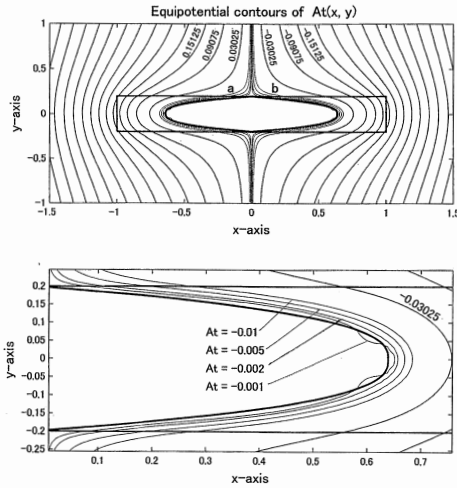


図7 図6のポテンシャル $\hat{A}_t(x, y)$ の等高線を与える磁束流線図。左右の端から13本ずつの流線はMATLABのcontour関数による描画。中央部の左右6本に \hat{A}_t 値を書いている。これらを除く中央の文字a, b間を通る細い流線群(左右8本)は本研究独自のプログラムで描いたもので、右側被遮蔽領域部を拡大したのが下の図。 $\hat{A}_t = -0.001$ の磁束流線が最も電流前線(n次曲線)に近い。

流前線の外側近傍を巡っていることがわかる。これらの線はMATLABのcontour関数を使わずに、本研究で独自に作ったプログラムで描いた磁束流線である。

この磁束流線群の詳細を見るために、拡大したものを図7の下側に示す。外側から $\hat{A}_t = -0.01, -0.005, -0.002, -0.001$ とした場合の結果が描かれている。 \hat{A}_t が小さくなるにつれ電流前線に近づく様子が見える。 $\hat{A}_t = -0.001$ になると、被遮蔽領域の $\hat{x} \leq \hat{a}_t$ 近傍で磁束流線が電流前線(n次曲線)の内部へ食い込む形になっている。更に \hat{A}_t を小さくすると、次に示す被遮蔽領域内の複雑なポテンシャル分布のせいで、正常な流線図が描けなかった。従って、 $\hat{A}_t = 0.001 = 1 \times 10^{-3}$ あたりが、磁束流線とn次曲線近似の電流前線の一致を見る限度だと言える。

次に、被遮蔽領域内のポテンシャル分布を見てみると、図8のようになる。図8(a)は \hat{y} の一定値を切口として、 \hat{x} 方向の \hat{A}_t 変化を見たものである。 \hat{x} 軸上($\hat{y} = 0$)では、 $\hat{x} \leq \hat{a}_t$ の範囲で \hat{A}_t は小さく 1×10^{-3} 未満での変化しかないが、 $\hat{x} \geq \hat{a}_t$ になると急激に $|\hat{A}_t|$ が増

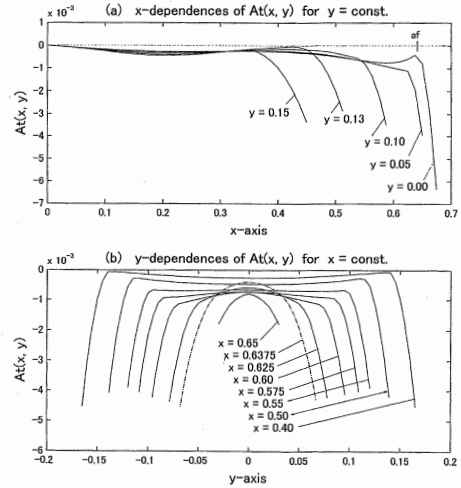


図8 被遮蔽領域内のポテンシャル分布を表す図。(a)は \hat{x} 方向の \hat{A}_t 変化を、(b)は \hat{y} 方向の \hat{A}_t 変化を見たものである。いずれも被遮蔽領域内なら $|\hat{A}_t|$ は 1×10^{-3} 未満での変化しかなく、領域を越すと急激に大きくなる。(b)図中の一点鎖線は \hat{x} 軸上の被遮蔽領域端部 $\hat{x} \approx \hat{a}_t$ 付近で切り出した \hat{y} 方向分布を表す。

加する。 $\hat{y} = 0$ 以外の \hat{y} 値でも、被遮蔽領域内なら $|\hat{A}_t|$ は小さく、領域を越すと急激に大きくなる傾向をもつ。図8(b)は \hat{x} の一定値を切口として、 \hat{y} 方向の \hat{A}_t 変化を見たものであるが、やはり、被遮蔽領域内なら $|\hat{A}_t|$ は小さく 1×10^{-3} 未満での変化しかなく、領域を越すと急激に大きくなる。

以上より、被遮蔽領域内のポテンシャル $|\hat{A}_t|$ は高々 1×10^{-3} であり、 $|\hat{A}_t| = 1 \times 10^{-3}$ の値を持つ磁束流線は、n次曲線近似の電流前線とほぼ一致するという結果が得られた。

被遮蔽領域端 $|\hat{x}| \approx \hat{a}_t \approx 0.64$ 近傍では、 $|\hat{A}_t(\hat{a}_t)| = (0.4\pi)\hat{a}_t \approx 0.8$ であるから、およそ1の大きさの外部磁界ポテンシャルをn次曲線の電流分布で遮蔽した結果、総合ポテンシャルが 1×10^{-3} まで小さくなったことより、遮蔽の誤差は 1×10^{-3} 、つまり0.1%となる。

7. おわりに

電流前線をn次曲線で近似する方法によると、電流前線に沿ってのベクトルポテンシャルがおよそ

0.1%まで遮蔽されるという結果を得た。電流前線の表記法としては非常に簡明である n 次曲線で、このような少ない誤差で遮蔽効果を表せるということは、本稿で扱った例の場合には、 n 次曲線近似法が実用的に優れていることを示しているものと考えられる。今後、平板アスペクト比や磁界の大きさが異なる対象について、調査を行う必要がある。

参考文献

- 1) 野田 稔：福岡工業大学研究論集，第37巻，第2号，pp.177-183，2005.
- 2) The MathWorks, Inc.

付録 A 1. 矩形領域電流対がつくるベクトルポテンシャル $\hat{A}_j(x, y)$ の式

図 1 (b) のように、矩形電流領域 I ($\hat{a}_f \leq \hat{x} \leq 1$) には一様な手前向きの電流が流れ、矩形電流領域 II ($-1 \leq \hat{x} \leq -\hat{a}_f$) には一様な奥向きの電流が流れているとき、この矩形電流対が作るベクトルポテンシャル $\hat{A}_j(x, y)$ は、第 1 象限 ($\hat{x} \geq 0, \hat{y} \geq 0$) の範囲で次のように表せる。

まず、 $\hat{y} = \hat{d}_s$ を除く第 1 象限内の点で、次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{A}_j(x, y) &= 2\pi \{1 + \text{sgn}(Y_2)\} F_1(\hat{x}) \\ &+ Y_1 \left\{ \log \left(\frac{X_1^2 + 1}{X_2^2 + 1} \right) - \hat{a}_f \log \left(\frac{X_3^2 + 1}{X_4^2 + 1} \right) \right\} \\ &+ Y_2 \left\{ \log \left(\frac{Z_1^2 + 1}{Z_2^2 + 1} \right) - \hat{a}_f \log \left(\frac{Z_3^2 + 1}{Z_4^2 + 1} \right) \right\} \\ &+ \hat{x} Y_1 \log \left(\frac{X_1^2 + 1}{X_3^2 + 1} \cdot \frac{X_2^2 + 1}{X_4^2 + 1} \right) + \hat{x} Y_2 \log \left(\frac{Z_1^2 + 1}{Z_3^2 + 1} \cdot \frac{Z_2^2 + 1}{Z_4^2 + 1} \right) \\ &+ Y_1^2 \{ (1 - X_1^2) \arctan X_1 - (1 - X_3^2) \arctan X_3 \} \\ &- Y_1^2 \{ (1 - X_2^2) \arctan X_2 - (1 - X_4^2) \arctan X_4 \} \\ &+ Y_2^2 \{ (1 - Z_1^2) \arctan Z_1 - (1 - Z_3^2) \arctan Z_3 \} \\ &- Y_2^2 \{ (1 - Z_2^2) \arctan Z_2 - (1 - Z_4^2) \arctan Z_4 \} \end{aligned} \quad (\text{A. 1})$$

ただし、

$$F_1(\hat{x}) = \begin{cases} (1 - \hat{a}_f) \hat{x} & \cdots 0 < \hat{x} < \hat{a}_f \\ \hat{x} - \frac{1}{2} \hat{x}^2 - \frac{1}{2} \hat{a}_f^2 & \cdots \hat{a}_f < \hat{x} < 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \hat{a}_f^2 & \cdots 1 < \hat{x} \end{cases} \quad (\text{A. 2})$$

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &\equiv \hat{d}_s + \hat{y}, & Y_2 &\equiv \hat{d}_s - \hat{y}, \\ X_1 &\equiv \frac{1 + \hat{x}}{\hat{d}_s + \hat{y}}, & X_2 &\equiv \frac{1 - \hat{x}}{\hat{d}_s + \hat{y}}, \\ X_3 &\equiv \frac{\hat{a}_f + \hat{x}}{\hat{d}_s + \hat{y}}, & X_4 &\equiv \frac{\hat{a}_f - \hat{x}}{\hat{d}_s + \hat{y}}, \\ Z_1 &\equiv \frac{1 + \hat{x}}{\hat{d}_s - \hat{y}}, & Z_2 &\equiv \frac{1 - \hat{x}}{\hat{d}_s - \hat{y}}, \\ Z_3 &\equiv \frac{\hat{a}_f + \hat{x}}{\hat{d}_s - \hat{y}}, & Z_4 &\equiv \frac{\hat{a}_f - \hat{x}}{\hat{d}_s - \hat{y}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 3})$$

また、 $\hat{y} = \hat{d}_s$ 上 ($\hat{x} \geq 0$) の規格化ポテンシャル $\hat{A}_j(x, \hat{d}_s)$ は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{A}_j(x, \hat{d}_s) &= 2\pi F_1(\hat{x}) \\ &+ 2\hat{d}_s \left\{ \log \left(\frac{X_{10}^2 + 4}{X_{20}^2 + 4} \right) - \hat{a}_f \log \left(\frac{X_{30}^2 + 4}{X_{40}^2 + 4} \right) \right\} \\ &+ 2\hat{x} \hat{d}_s \log \left(\frac{X_{10}^2 + 4}{X_{30}^2 + 4} \cdot \frac{X_{20}^2 + 4}{X_{40}^2 + 4} \right) \\ &+ 4\hat{d}_s^2 \left\{ \left(1 - \left(\frac{X_{10}}{2} \right)^2 \right) \arctan \left(\frac{X_{10}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \left(\frac{X_{20}}{2} \right)^2 \right) \arctan \left(\frac{X_{20}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \left(\frac{X_{30}}{2} \right)^2 \right) \arctan \left(\frac{X_{30}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \left(\frac{X_{40}}{2} \right)^2 \right) \arctan \left(\frac{X_{40}}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A. 4})$$

さらに、 \hat{x} 軸上 ($\hat{x} \geq 0$) の規格化ポテンシャル $\hat{A}_j(x, 0)$ は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{A}_j(x, 0) &= 4\pi F_1(\hat{x}) \\ &+ 2\hat{d}_s \left\{ \log \left(\frac{X_{10}^2 + 1}{X_{20}^2 + 1} \right) - \hat{a}_f \log \left(\frac{X_{30}^2 + 1}{X_{40}^2 + 1} \right) \right\} \\ &+ 2\hat{x} \hat{d}_s \log \left(\frac{X_{10}^2 + 1}{X_{30}^2 + 1} \cdot \frac{X_{20}^2 + 1}{X_{40}^2 + 1} \right) \\ &+ 2\hat{d}_s^2 \left\{ (1 - X_{10}^2) \arctan X_{10} - (1 - X_{30}^2) \arctan X_{30} \right. \\ &\quad \left. - (1 - X_{10}^2) \arctan X_{20} + (1 - X_{40}^2) \arctan X_{40} \right\} \end{aligned}$$

(A. 5)

ここに,

$$X_{10} \equiv \frac{1+\hat{x}}{\hat{d}_s}, X_{20} \equiv \frac{1-\hat{x}}{\hat{d}_s}, X_{30} \equiv \frac{\hat{a}_t+\hat{x}}{\hat{d}_s}, X_{40} \equiv \frac{\hat{a}_t-\hat{x}}{\hat{d}_s} \quad (\text{A. 6})$$

である。

(3.1) 式において $\hat{d}_s \gg 1$ である場合, x 軸付近の $\hat{A}_j(\hat{x}, \hat{y})$ の式は

$$\hat{A}_j(\hat{x}, \hat{y}) = 4\pi F_1(\hat{x}) \quad (\text{A. 7})$$

に一致する。これはスラブ近似の式である。