Title	振動積分の漸近解析について
Author(s)	野瀬 敏洋
Citation	福岡工業大学ｴﾚｸﾄﾛﾆｸｽ研究所所報　第34巻　P13-P16
Issue Date	2017-10
URI	http://hdl.handle.net/11478/773
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

振動積分の漸近解析について

野瀬　敏洋（工学部電子情報工学科）

Asymptotic analysis of oscillatory integrals

Toshihiro NOSE　(Department of Information Electronics, Faculty of Engineering)

Abstract

In this summary, we discuss the recent study for the asymptotic behavior of oscillatory integrals at infinity. In a seminal work of A. N. Varchenko, the behavior of oscillatory integrals at infinity with real analytic phases are precisely investigated by using the Newton polyhedra of the phases. We give some expansion and asymptotic limits of oscillatory integrals with smooth phases.

Keywords：Oscillatory integrals, Newton polyhedra, asymptotic behavior

1. はじめに

本稿では 2016 年度の研究課題「調和解析学における非実解析的関数に関する漸近解析」に関連して，振動積分の漸近解析について，神本丈氏（九州大学）との共同研究による論文(9), (10)の内容を中心に，既知の結果や近年得られた研究結果の解説を試みる。

振動積分は次の形の積分

$$(1) \qquad I_f(t;\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{itf(x)}\varphi(x)dx$$

によって定義される。ここで，fは$\mathbb{R}^n$の原点の近傍U上で定義されるC^∞級実数値関数，φは$\mathbb{R}^n$上で定義されるC^∞級実数値関数でその台はコンパクト（有界閉）かつUに含まれるとする。(関数fの台とは集合$\{x \in U: f(x) \neq 0\}$の閉包のことである。) fを相関数，φを振幅関数という。振動積分$I_f(t;\varphi)$について$t \to \infty$のときの漸近挙動を調べることは，調和解析に限らず，数学の様々な分野に関連する重要な問題である。（応用については，例えば，参考文献(1), (12)を参照のこと。）

振動積分について，

$$I_f(t;\varphi) = e^{itf(0)}\int_{\mathbb{R}^n} e^{it(f(x)-f(0))}\varphi(x)dx$$

と変形することで漸近挙動における$f(0)$の寄与をくくり出すことができる。また，fの勾配∇fが 0 とならないとき，停留位相の原理により，任意の$N>0$に対して$I_f(t;\varphi) = O(t^{-N})$となり，漸近挙動としては自明なものとなる。これは，$I_f(t;\varphi)$の漸近挙動が相関数fの臨界点（$\nabla f = 0$となる点）の近傍における性質のみによって決まることを意味する。以上より，本稿では相関数fについて

$$f(0) = 0 \quad \text{および} \quad \nabla f(0) = 0$$

を仮定する。

振動積分の漸近解析において，相関数が実解析的である場合には（各点におけるテイラー級数が収束して元の関数と一致する場合には），特に漸近展開の形やその初項について非常に詳しいことがわかっている。これは実解析的な関数の零点集合が「きれい」なものであるためである。我々の興味は，関数が実解析的である場合とそうでない場合に生じる解析的な性質の違いにある。

本稿ではまず，振動積分の漸近解析について，相関数が実解析的である場合の既知の結果を，Varchenko によるニュートン多面体を用いた解析を中心に解説する。その後，相関数に対する実解析性などの条件を仮定しない場合について，近年得られた結果を述べる。

記法と記号　本稿では次の記法と記号を用いる。$\mathbb{Z}_{\geq 0} \coloneqq \{x \in \mathbb{Z}: x > 0\}$，$\mathbb{R}_{\geq 0} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$とする。また，$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$に対して，

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

$$\partial^\alpha f := \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots \alpha_n} f}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {x_n}^{\alpha_n}}$$

と表す。

2. ニュートン多面体を用いた漸近解析

この章では振動積分の漸近解析において非常に重要な Varchenko の結果について述べる。この結果により，振動積分の漸近解析では，相関数の特異点論的な性質，特にニュートン多面体とよばれる多面体が非常に重要な役割を果たすということがわかった。

〈2·1〉 準備

この節ではニュートン多面体および関連した事柄について定義を述べる。

2.1.1 多面体　この項では多面体の定義について述べる。（詳しくは参考文献(14)を参照のこと。）

組$(a,l)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$に対して$\mathbb{R}^n$内の超平面$H(a,l)$と閉半空間$H^+(a,l)$を

$$H(a,l)\coloneqq\{x\in\mathbb{R}^n:\langle a,x\rangle=l\},$$
$$H^+(a,l)\coloneqq\{x\in\mathbb{R}^n:\langle a,x\rangle\geq l\}$$

と定義する。ここで，$\langle a,x\rangle$は通常のユークリッド内積である。有限個の$\mathbb{R}^n$内の閉半空間を用いて，その共通集合で表される集合を$\mathbb{R}^n$の（凸）多面体という。

$\mathbb{R}^n$の多面体Pに対して組$(a,l)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}$が妥当（valid）であるとは，$P\subset H^+(a,l)$が成り立つときにいう。多面体$P$の面とは，$P$に対して妥当な組$(a,l)$によって$P\cap H(a,l)$で表される集合であると定義する。

2.1.2　　ニュートン多面体　　fは$\mathbb{R}^n$の原点の近傍U上で定義されるC^∞級実数値関数とする。$\hat{f}(x)$を原点におけるテイラー級数とする。すなわち，

$$\hat{f}(x)=\textstyle\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq0}}c_\alpha x^\alpha,\ \text{ただし，}\ c_\alpha=\frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!}$$

とする。集合$\bigcup\{\alpha+\mathbb{R}^n_{\geq0}:c_\alpha\neq0\}$の$\mathbb{R}^n_{\geq0}$における凸包を$f$のニュートン多面体といい，$\Gamma_+(f)$で表す。ニュートン多面体は（2.1.1 で定義した）多面体となる。特に，非有界な多面体となる。fの原点におけるテイラー級数が 0 のとき，すなわち$\Gamma_+(f)=\emptyset$であるとき，fは原点において平坦であるという。

今，fは非平坦，すなわち，$\Gamma_+(f)\neq\emptyset$であると仮定する。このとき，ニュートン多面体の境界と対角線集合$\{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n_{\geq0}:\alpha_1=\cdots=\alpha_n\}$との共通集合をニュートン多面体の境界の中心という。これは 1 点集合であるのでその点をq_*と表す。fのニュートン距離$d(f)$を中心q_*の座標成分により定義する。すなわち，$q_*=(d(f),\dots,d(f))$である。ニュートン多面体$\Gamma_+(f)$の面の中で中心q_*を含む最小のものを主要面といい，γ_*と表す。主要面の余次元（主要面の次元を全体空間の次元nから引いたもの）をニュートン距離の重複度といい，$m(f)$と表す。

2.1.3　関数の面部　　fは$\mathbb{R}^n$の原点の近傍V上で定義される非平坦C^∞級実数値関数とする。γをfのニュートン多面体の 1 つの面とする。fが原点の開近傍$U\subset V$上，γ-部をもつとは，Uの各点xと面γを定義する任意の妥当な組$(a,l)\in\mathbb{Z}^n_{\geq0}\times\mathbb{Z}_{\geq0}$に対して，極限

$$\lim_{t\to0}\frac{f(t^{a_1}x_1,\dots,t^{a_n}x_n)}{t^l}$$

が収束するときにいう。この極限を$f_\gamma(x)$と表すと，$f_\gamma(x)$はU上のC^∞級実数値関数となり，これをU上のfのγ-部という。γがコンパクトな面であるとき，fのγ-部は多項式となり，$f_\gamma(x)=\sum_{\alpha\in\gamma\cap\mathbb{Z}^n_{\geq0}}c_\alpha x^\alpha$となる。ここで，$c_\alpha$は原点におけるテイラー級数の各係数である。（関数の面部の性質については例えば参考文献[7]を参照のこと。）

〈2·2〉　ニュートン多面体を用いた漸近解析　　相関数fと振幅関数φは式（1）のものとする。fが実解析的のとき，振動積分は次の漸近展開をもつことが知られている[11]。

定理 1. fはU上実解析的であるとする。φの台が原点の十分小さな近傍に含まれるならば，$t\to\infty$のとき

$$I_f(t;\varphi)\sim\sum_{\alpha\in S}\sum_{k=1}^{n}C_{\alpha k}(\varphi)t^\alpha(\log t)^{k-1}\qquad(2)$$

という形の漸近展開を得る。ただし，Sは負の有理数からなる等差数列の有限個の和集合で，fにのみ依存する。

注意　定理 1 は広中の特異点解消定理[4]を用いて証明される。実解析性が特異点解消のための十分条件となっている。

Varchenko は相関数fについて次の条件を仮定して，振動積分の漸近展開について調べている。

定義 1. fがニュートン多面体$\Gamma_+(f)$に関して非退化とは，$\Gamma_+(f)$の任意のコンパクトな面γに対して，多項式$f_\gamma(x)$が集合$U\cap(\mathbb{R}\setminus\{0\})^n$上

$$\nabla f_\gamma=\left(\frac{\partial f_\gamma}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f_\gamma}{\partial x_n}\right)\neq(0,\dots,0)$$

を満たすときにいう。

以下は Varchenko による論文[13]およびテキスト[1]内の結果をまとめたものである。

定理 2. fはU上実解析的であり，そのニュートン多面体に関して非退化であると仮定する。このとき，次が成り立つ。

(i) 式(2)における数列$\{\alpha\}$はトーリック多様体の理論を用いてニュートン多面体から構成される有限個の等差数列の和集合に含まれる。

(ii) φの台が原点の十分小さな近傍に含まれるならば，正の定数$C(\varphi)$が存在して

$$|I_f(t;\varphi)|\leq C(\varphi)t^{-1/d(f)}(\log t)^{n-1}$$

が成り立つ。

(iii) 次の 3 条件の少なくとも 1 つが成り立つとする。

(a) $d(f)>0$;

(b) fはU上非負または非正;

(c) $1/d(f)$は奇数ではなく，f_{γ_*}は集合$U\cap(\mathbb{R}\setminus\{0\})^n$上で零点をもたない。

このとき，あるφと，0 でない定数$C(\varphi)$が存在して

$$\lim_{t\to\infty}t^{1/h(f)}(\log t)^{-m(f)+1}\cdot I_f(t;\varphi)=C(\varphi)$$

となる。

注意　ニュートン多面体とその関連する概念は局所座標系の取り方に依存する。一方，定理 2 では，座標不変である振動積分の漸近挙動が座標の取り方に依存するニュートン距離とその多重度によって決まってしまうように見える。実は，定理 2 ではニュートン多面体に関する非退化性の仮定

により「良い」座標を選んでいることになっている。

注意　Varchenko は，ニュートン多面体$\Gamma_+(f)$からトーリック多様体を構成して，それにより相関数fの零点集合について具体的な特異点解消を構成した。そして，その「良い」特異点解消を用いて解析を行うことで，特に，振動積分の漸近展開の初項の位数が，相関数のニュートン距離とその多重度によって与えられることを示した。著者らはニュートン多面体に関する非退化条件の下，相関数があるC^∞級関数のクラスに属する場合には，Varchenko と同様の特異点解消を構成することができ，Varchenko の解析の一般化および精密化が得られることを示した[7, 8]。上記のあるC^∞級関数のクラスは，関数がそのニュートン多面体の任意の面γに対してγ-部をもつ，という条件を満たすC^∞級関数により構成される。

3.　ニュートン多面体に関する非退化性および実解析性を仮定しない場合

〈2･1〉　相関数が主要面部をもつ場合　相関数にニュートン多面体に関する非退化性および実解析性を仮定しない場合について，定理 1 のような漸近展開についてはこれまでにほとんど結果が得られていない。我々は 2 次元（$n=2$）かつ相関数が主要面部をもつ場合に，ある種の振動積分の展開を得た。結果を述べるために，まずは adapted である座標および superadapted である座標の定義を述べる。

fは$\mathbb{R}^2$の原点の近傍Uで定義される非平坦C^∞級実数値関数とし，$f(0,0)=0, \nabla f(0,0)=0$とする。$f$の高さ$h(f)$を

$$h(f) \coloneqq \sup_x d_x(f)$$

と定義する。ここで，$d_x(f)$は原点における局所座標系xの中で定義されるニュートン距離であり，上記の上界はすべての局所座標系xについてとる。$h(x)=d_x(f)$であるとき，座標xはfについて adapted である（または，fは adapted な座標系の中にある）という。

注意　ニュートン多面体とその関連する概念は局所座標系の取り方に依存しているが，そこから高さ$h(f)$という座標の取り方によらない情報を取り出している。

注意　2 次元の場合に，任意の実解析的関数についてある adapted な座標が存在することが Varchenko によって示された。それを用いて，2 次元かつ相関数が実解析的である場合には定理 2 と同様の結果が得られている[13]。より一般に，2 次元の場合には任意のC^∞級関数についてある adapted な座標が存在することが知られている[5]。

ニュートン多面体$\Gamma_+(f)$の境界の中心を含む任意のコンパクトな辺（1 次元の面）γに対して，関数$f_\gamma(\pm 1,\cdot)$または$f_\gamma(\cdot,\pm 1)$の零点の位数が$d_x(f)$より小さいとき，座標系xはfについて superadapted である（または，fは superadapted な座標系の中にある）という。

注意　2 次元の場合には任意のC^∞級関数についてある superadapted な座標が存在することが知られている[3]。また，fについて superadapted な座標はfについて adapted な座標であることも示されている。

以下，我々の結果について述べる。相関数のニュートン多面体の主要面が非コンパクトである場合には相関数が主要面部をもつ，という条件の下，振動積分のある展開を得た。また，その際の初項の係数を詳しく調べ，漸近極限の陽公式を得た[9]。

定理 3．座標系xはfについて superadapted であるとする。このとき，ニュートン多面体の主要面が非コンパクトな辺γであるならば$f(x_1,x_2)$はγ-部をもつと仮定する。また，$h(f)>1$とする。このとき，次が成り立つ。φの台が$\mathbb{R}^2$の原点の十分小さい近傍に含まれるとき，fにのみ依存する正の実数δと$\mathbb{Q}$の部分集合S_δが存在して，

$$|I_f(t;\varphi) - \sum_{\alpha\in S_\delta}(C_\alpha(\varphi)t^\alpha \log t + C'_\alpha(\varphi)t^\alpha)| < Ct^{-1/h(f)-\delta-\varepsilon}$$

を満たす。ただし，$C_\alpha(\varphi)$と$C'_\alpha(\varphi)$は定数，Cは正の定数，εは十分小さい正の定数である。さらに，集合S_δはfのニュートン多面体からあるアルゴリズムによって構成される有限個の等差数列を区間$[-1/h(f)-\delta, -1/h(f)]$に制限したものである。

この展開の初項に関して，極限

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/h(f)}(\log t)^{-m(f)+1}\cdot I_f(t;\varphi) = C(\varphi)$$

を得る。ただし，$C(\varphi)$は次のように与えられる。以下，負の数Aに対して，$A^{-1/h(f)} \coloneqq |A|^{-1/h(f)}e^{-\pi i/h(f)}$とし，$\Gamma$はガンマ関数とする。また，簡単のため$h \coloneqq h(f)$とする。

（a）fのニュートン多面体$\Gamma_+(f)$の主要面γ_*はコンパクトな辺で，妥当な組$(a,l)=((a_1,a_2),l)\in\mathbb{Z}^2_{\geq 0}\times\mathbb{Z}_{\geq 0}$によって定義されているとする。このとき，

$$C(\varphi) = \frac{\Gamma(1/h)e^{\pi i/2h}}{h(a_2/a_1+1)}\varphi(0,0)\int_{-\infty}^{\infty}(f_{\gamma_*}(1,u)^{-1/h} + f_{\gamma_*}(-1,u)^{-1/h})du$$

となる。

（b）主要面γ_*は垂直な辺であるとする。このとき，

$$C(\varphi) = \frac{\Gamma(1/h)e^{\pi i/2h}}{h}\int_{-\infty}^{\infty}(f_{\gamma_*}(1,u)^{-1/h} + f_{\gamma_*}(-1,u)^{-1/h})\varphi(0,u)du$$

となる。

（c）主要面γ_*は水平な辺であるとする。このとき，

$$C(\varphi) = \frac{\Gamma(1/h)e^{\pi i/2h}}{h}\int_{-\infty}^{\infty}(f_{\gamma_*}(u,1)^{-1/h} + f_{\gamma_*}(u,-1)^{-1/h})\varphi(u,1)du$$

となる。

（d）主要面γ_*は頂点であるとする。この頂点を含む2つの辺を定義する妥当な組を$((a_1,a_2),l_1),((b_1,b_2),l_2)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^2\times\mathbb{Z}_{\geq 0}$とする。ここで，$0\leq a_2/a_1\leq b_2/b_1\leq\infty$となるようにする。もし，$h$が奇数ならば，

$$C(\varphi)=\frac{4\Gamma(1/h)\cos\pi/2h}{h}\varphi(0,0)|f_{\gamma_*}(1,1)|^{-1/h}\left(\frac{1}{a_2/a_1+1}-\frac{1}{b_2/b_1+1}\right)$$

となる。もし，hが偶数ならば，

$$C(\varphi)=\frac{4\Gamma(1/h)e^{\pi i/2h}}{h}\varphi(0,0)|f_{\gamma_*}(1,1)|^{-1/h}\left(\frac{1}{a_2/a_1+1}-\frac{1}{b_2/b_1+1}\right)$$

となる。

特に，$\varphi(0,0)>0$かつU上で$\varphi(x_1,x_2)\geq 0$ならば，$C(\varphi)\neq 0$となる。

注意　定理2（iii）のような漸近極限の陽公式については，これまでに限られた結果しか得られていなかった。参考文献[1]の中では，2次元の場合（$n=2$の場合）かつ主要面がコンパクトである場合について漸近極限が「完全に決定される」と言及されているが，陽公式は明示されていない。我々はこの場合以外にも，主要面が非コンパクトである場合に条件をつけて漸近極限の陽公式を求めている。

〈2･1〉　相関数が主要面部をもたない場合　　相関数が主要面部をもたない場合についてはいまだに一般的な結果は得られていない。特別な場合について，次の漸近極限を得た[1]。

定理4. $f(x_1,x_2)=x_2^q+e^{-1/|x_1|^p}$であるとする。ただし，$p>0$，$q$は2以上の整数とする。このとき，

$$\lim_{t\to\infty}t^{1/q}(\log t)^{1/p}\cdot\int_{\mathbb{R}^n}e^{itf(x)}\varphi(x)dx=C_q\varphi(0,0)$$

となる。ただし，C_qは0でない定数であり，

$$C_q=\begin{cases}4\Gamma(1/q+1)\cdot e^{\pi i/2q} & (q\text{は偶数})\\ 4\Gamma(1/q+1)\cdot\cos(\pi/2q) & (q\text{は奇数})\end{cases}$$

となる。

注意　定理4における相関数fはsuperadaptedな座標で表されており，ニュートン多面体の主要面γ_*は非コンパクトな面$\{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}_{\geq 0}^2:\alpha_2=q\}$となる。また，$f$は主要面部$f_{\gamma_*}$をもたないことが簡単な計算によってわかる。

4.　まとめ

2次元の振動積分について，相関数にニュートン多面体に関する非退化性および実解析性を仮定しない場合の漸近解析を行った。その結果，振動積分の漸近挙動についてある展開公式を得た。また，漸近極限について，相関数のニュートン多面体の主要面がコンパクトである場合と非コンパクトである場合について大きな違いがあることが明らかとなった。

謝辞

本稿作成の一部は，エレクトロニクス研究所の支援を受けて行われました。ここに謝意を表します。

（平成２９年7月20日受付）

文　　献

（1）V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, and V. N. Varchenko: Singularities of Differentiable Maps II, Birkhäuser, (1988)
（2）J. Denef, J. Nicaise and P. Sargos: Oscillating integrals and Newton polyhedra, J. Anal. Math. 95 (2005), 147-172.
（3）M. Greenblatt: The asymptotic behavior of degenerate oscillatory integrals in two dimensions, J. Funct. Anal. 257 (2009), 1759-1798.
（4）H. Hironaka: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, II, Ann. of Math. 79 (1964), 109-326.
（5）I. A. Ikromov and D. Müller: On adapted coordinate systems, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), 2821-2848.
（6）I. A. Ikromov and D. Müller: Uniform estimates for the Fourier transform of surface carried measures in $\mathbb{R}^3$ and an application to Fourier restriction, J. Fourier anal. appl. 17 (2011), 1292-1332.
（7）J. Kamimoto and T. Nose: Toric resolution of singularities in certain class of C^∞ functions and asymptotic analysis of oscillatory integrals, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 23 (2016), 425-485.
（8）J. Kamimoto and T. Nose: Newton polyhedra and weighted oscillatory integrals with smooth phases, Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), 5301-5361.
（9）J. Kamimoto and T. Nose: On the asymptotic expansion of oscillatory integrals with smooth phases in two dimensions, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B57 (2016), 141-157.
(10) J. Kamimoto and T. Nose: Asymptotic limit of oscillatory integrals with certain smooth phases, to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu.
(11) B. Malgrange: Intégrales asymptotiques et monodromie, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 7 (1974), 405-430.
(12) E. M. Stein: Harmonic Analysis. Real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals, Princeton University Press, Princeton, NJ, (1993)
(13) A. N. Varchenko: Newton polyhedra and oscillating integrals, Functional Anal. Appl. 10-3 (1976), 175-196.
(14) G. M. Ziegler: Lectures on Polytopes, Graduate Texts in Mathematics, 152, Springer-Verlag, New York, (1995)