

2次元円柱配列からなる  
フォトリック結晶導波路デバイス構造に対する  
数値解析法に関する研究

福岡工業大学大学院 工学研究科

知能情報システム工学専攻

中武 義将

平成26年5月30日

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>はじめに</b>	<b>3</b>
1.1	背景	3
1.2	構成	5
<b>第 2 章</b>	<b>Recursive Transition-Matrix Algorithm の基本的な解析手法</b>	<b>7</b>
2.1	展開基底	7
2.2	1 本の円柱による電磁波散乱の解析	9
2.3	有限本数の円柱による電磁波散乱の解析	10
2.4	周期的に配列された円柱による平面波散乱の解析	13
2.5	周期的円柱配列の多層構造による平面波散乱の解析	18
2.6	フォトニック結晶導波路中を伝搬する Floquet モードの解析	22
<b>第 3 章</b>	<b>周期境界条件を用いた解析法</b>	<b>25</b>
3.1	解析対象の設定	25
3.2	各層の円柱配列による散乱	27
3.3	各層の Floquet モード解析	32
3.4	構造全体の散乱行列	35
3.5	数値例	37
3.5.1	直線導波路の Floquet モード	37
3.5.2	共振器構造を持つ導波路デバイス構造の伝搬特性	38
3.5.3	分岐導波路デバイス構造の伝搬特性	41
3.6	まとめ	48

<b>第 4 章</b>	<b>周期境界条件を陽に用いない解析法</b>	<b>49</b>
4.1	解析対象とする問題の設定 . . . . .	49
4.2	各層の円柱配列による散乱 . . . . .	51
4.3	数値例 . . . . .	57
4.3.1	直線導波路の Floquet モード . . . . .	58
4.3.2	導波路デバイス構造の伝搬特性 . . . . .	58
4.4	まとめ . . . . .	64
<b>第 5 章</b>	<b>まとめ</b>	<b>65</b>

# 第1章 はじめに

## 1.1 背景

近年の情報化社会の発展は、大変目覚ましいものがある。数十年前にはスーパーコンピュータを用いる必要のあった数値計算などが、現在では家庭用のパーソナルコンピュータで行えるようになってきている。また、現在市販されている家庭用テレビゲーム機でも、かつてのスーパーコンピュータに匹敵する性能を持っている。これには、回路の小型化が大きく寄与しており、それにより機器の高性能化が達成されている。しかし、小型化によるノイズ耐性の悪化などによって、長期的な性能の向上には困難が予想される。その解決策として、光回路を用いてコンピュータを構成することが提案されている。光回路を用いると、外部や内部からの電磁波による影響が軽減され、さらに素子間の通信を広帯域にできることなどによって性能を格段に向上させられると考えられている。

現在光導波路として用いられている全反射を利用する誘電体導波路では、急な曲げによって漏えい損失が大きくなることが知られている。しかし、微細な領域内で構成される光回路では、導波路の曲率半径を小さくすることが求められ従来型の導波路を用いるのは難しい。漏えい損失を抑えることができる基本的な構造としてフォトニック結晶が注目されており、現在研究が進んでいる。フォトニック結晶は、誘電率の大きく異なる複数の誘電体を周期的に配列した構造である。形状や媒質をうまく選ぶと、ある周波数帯域の電磁波が、構造内部を通り抜けられない特徴を持つ。このフォトニック結晶に線状の欠陥を設けると、欠陥部に電磁波を閉じ込めることができ、導波路として機能する。欠陥の設け方などを工夫す

ると、共振器や合分波器などのデバイスとしての応用も可能である。

周期構造を基本とするフォトニック結晶デバイス構造内を伝搬する電磁波の数値解析には、ビーム伝搬法 [1] や Finite-Difference Time-Domain (FDTD) 法 [2] などの手法が用いられている。周期構造による電磁波散乱問題や周期構造中の電磁波伝搬問題に対する数値解析は、誤差が累積しやすいため、特に空間を格子状に離散化する解析手法では、格子のサイズを相当に小さくしなければ信頼できる結果が得られず、計算コストが大きくなってしまふことが問題になっている。フォトニック結晶導波路における入出力端では、多くの場合、入出力用導波路との整合を考える必要がある。整合の条件を与えるためには、入出力用導波路の固有モード解析が不可欠であるが、ビーム伝搬法や FDTD 法は固有モード解析には適しておらず、入出力端の取り扱いが問題になる場合が多い。

直線のフォトニック結晶導波路内では、欠陥方向に対する周期性は維持されているので、Floquet の定理より、内部の電磁界は擬周期性を持つ固有モードの重ね合わせで表現できる [3]。この固有モードは Floquet モードと呼ばれており、一般 Fourier 級数展開で表現できる [4-6]。導波路内の Floquet モードは、周期構造の多層構造を解析する手法 [7] によって分散方程式を導出し、これを数値的に解く手法が提案されている。この手法では、導波する Floquet モードについては高精度の計算ができるが、エバネッセントモードについては信頼性のある結果を得ることができていないようである。

エバネッセント Floquet モードの考察には、誘電体導波路の不連続部分を解析するために開発された Fourier 級数展開法 [8-10] が有用であることが知られている。この方法では、伝搬方向に垂直な方向に仮想周期を導入して電磁界を Fourier 級数展開によって表し、伝搬による Fourier 係数の変化を計算する。フォトニック結晶導波路の Floquet モードを解析する場合には、伝搬方向の周期セルに対する伝達行列の固有値解析を行う [11-13]。また、複数の導波路が縦続接続された構造の入出力特性を再帰的計算により得ることができる [14, 15]。

本論文では、円柱によって構成された2次元フォトニック結晶導波路デバイス構造の解析について、複数円柱からなる散乱体による散乱問題解析手法である Recursive Transition-Matrix Algorithm (RTMA) [16,17] に基づいた定式化を提案する。筆者らは、Fourier 級数展開法を基本に、周期境界条件を用いた解析法を提案してきた。欠陥が直線となっているフォトニック結晶導波路の伝搬する Floquet モードをについて解析し [18]、その手法を応用することにより、共振器などフォトニック結晶導波路デバイス構造についての数値解析を行った [19]。この手法では、仮想的に設けた境界において電磁界が存在しない場合を前提としている。したがって、数値解析上、ある程度の誤差が含まれることが予測される。この誤差の評価をするために、構造が無限大の不完全周期構造における数値解析が必要である。そのため、スペクトル領域法を用いた不完全周期構造の数値解析手法を著者らは提案した [20,21]。

本論文では、時間依存性が  $e^{-i\omega t}$  で、 $z$  方向に一様な電磁界について考えることにする。この場合、電磁界は磁界が  $z$  軸と直交する TM 波と、電界が  $z$  軸に直交する TE 波に分けて考えることができる。また、フォトニック結晶を構成する円柱は、等方性均質媒質とする。

## 1.2 構成

この論文は5章からなっている。第1章で本論文の背景および目的について述べたあと、第2章では、円柱による散乱問題の解析について触れ、この論文で提案する手法の基礎となっている RTMA の基本的な定式化について説明する。

第3章では、円柱による完全フォトニック結晶構造から適当な位置の円柱を取り除いて作られるフォトニック結晶導波路デバイス構造について、RTMA と Fourier 級数展開法、そして多層構造の解析手法を併用した定式化を行い、計算例を示す。この定式化では、電磁界の主たる伝搬方向と垂直に仮想周期を導入する。円柱配列

が電磁界の導波方向に多層構造をなしていると考え、構造全体の伝搬特性は、各層の縦続接続により得ることができる。また、導波モードだけでなくエバネッセントモードについても計算が可能な手法である。

第4章では、第3章と同様な構造について、周期境界条件を陽に用いないスペクトル領域法による定式化を行い、計算例を示す。この手法では、仮想的な周期境界を導入することなく波数空間で離散化を行う。この手法についても、構造全体の伝搬特性は、各層の縦続接続により得ることができ、導波モードだけでなくエバネッセントモードについても計算が可能である。

第5章でこの論文全体のまとめを行っている。

# 第2章 Recursive Transition-Matrix Algorithmの基本的な解析 手法

RTMA は、複数の散乱体による電磁波散乱問題を解く手法の一つである。個々の散乱体に対する入射界と散乱界の関係をあらかじめ計算することにより、それらを組み合わせて構成される構造体全体の特性を計算することができる。また、有限本数が存在する場合だけでなく、同一の特性を持つ散乱体が周期的に無限個配置されている構造においてもその特性を得ることができる。

## 2.1 展開基底

本論文では、円柱によって構成された構造について考えるため、電磁界を基本的に円筒波展開で表現する。これは円柱表面における境界条件の整合を容易に行うためである。ここでは、 $n$  番目の要素が

$$\left(\mathbf{g}^{(Z)}(x, y)\right)_n = g_n^{(Z)}(x, y) = Z_n(k_s \rho(x, y)) e^{in\phi(x, y)} \quad (2.1)$$

である列行列  $\mathbf{g}^{(Z)}(x, y)$  によって展開基底を表現する。ただし、 $Z$  は円柱関数の種類を表しており、 $Z = J$  の時は Bessel 関数、 $Z = H^{(1)}$  の時は第 1 種 Hankel 関数

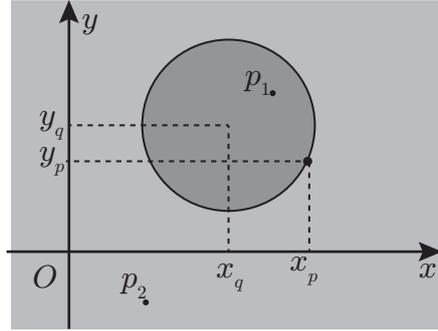


図 2.1: Graf の加法定理から得られる変換式の適用可能範囲

に関する円筒波展開基底を表すものとする。また、 $k_s$  は背景媒質中の波数で、

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.2)$$

$$\phi(x, y) = \arg(x + iy) \quad (2.3)$$

である。

円筒波関数は、Graf の加法定理 [22] を用いることで、その基点を移動させることができる。図 2.1 の  $p_1$  のように  $(x, y)$  が  $(x_q, y_q)$  を中心とする半径  $\rho(x_p - x_q, y_p - y_q)$  の円内にあるときは、

$$\mathbf{g}^{(Z)}(x - x_p, y - y_p) = \mathbf{G}^{(Z)}(x_q - x_p, y_q - y_p) \mathbf{g}^{(J)}(x - x_q, y - y_q) \quad (2.4)$$

で与えられ、図 2.1 の  $p_2$  のように円外にあるときは、

$$\mathbf{g}^{(Z)}(x - x_p, y - y_p) = \mathbf{G}^{(J)}(x_q - x_p, y_q - y_p) \mathbf{g}^{(Z)}(x - x_q, y - y_q) \quad (2.5)$$

で与えられる。ただし、 $\mathbf{G}^{(Z)}(x, y)$  は  $n$  行  $m$  列の要素が

$$(\mathbf{G}^{(Z)}(x, y))_{n,m} = g_{n-m}^{(Z)}(x, y) \quad (2.6)$$

で与えられる Toeplitz 行列である。

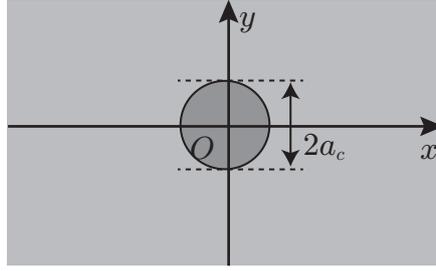


図 2.2: 円柱が 1 本置かれている状態

## 2.2 1本の円柱による電磁波散乱の解析

図 2.2 のように、誘電率が  $\epsilon_s$ 、透磁率が  $\mu_s$  である空間中に、誘電率が  $\epsilon_c$ 、透磁率が  $\mu_c$  である半径  $a_c$  で無限長の円柱が 1 本置かれている状態を考える。円柱内の領域を領域  $c$ 、円柱外の領域を領域  $s$  で、領域  $r$  での波数を  $k_r = \omega\sqrt{\epsilon_r\mu_r}$  ( $r = s, c$ ) と表すことにする。この構造に、円柱外に存在する波源から電磁波が入射した場合の散乱問題を考える。入射界は、Bessel 関数に関する円筒波関数の重ね合わせで表現することができ、

$$\psi^{(i)}(x, y) = \mathbf{g}^{(J)}(x, y)^t \mathbf{a}^{(i)} \quad (2.7)$$

のように表すことができる。ここで、上付き文字  $t$  は転置行列であることを表しており、 $\mathbf{a}^{(i)}$  は入射界の展開係数を要素とする列行列である。また、上付き文字  $i$  は、入射界 (incident field) に関するものであることを示している。

一方、円柱からの散乱電磁界は  $\rho \rightarrow \infty$  のとき外向放射条件を満たす必要があるので、

$$\psi^{(s)}(x, y) = \mathbf{g}^{(H^{(1)})}(x, y)^t \mathbf{a}^{(s)} \quad (2.8)$$

と表すことができる。ただし、上付き文字  $s$  は散乱界 (scattered field) に関するものであることを示している。入射界と散乱界の展開係数間の関係は、Transition-

Matrix (T-Matrix) [16] を用いて

$$\mathbf{a}^{(s)} = \mathbf{T}_c \mathbf{a}^{(i)} \quad (2.9)$$

のように表すことができる。行列  $\mathbf{T}_c$  の要素は、円柱表面における電磁界の境界条件を考慮することで導出でき、 $\delta_{n,m}$  を Kronecker のデルタとすると TM 波に対して

$$(\mathbf{T}_c)_{n,m} = \delta_{n,m} \frac{\zeta_s J'_n(k_c a_c) J_n(k_s a_c) - \zeta_c J_n(k_c a_c) J'_n(k_s a_c)}{\zeta_c J_n(k_c a_c) H_n^{(1)'}(k_s a_c) - \zeta_s J'_n(k_c a_c) H_n^{(1)}(k_s a_c)} \quad (2.10)$$

であり、TE 波に対して

$$(\mathbf{T}_c)_{n,m} = \delta_{n,m} \frac{\zeta_c J'_n(k_c a_c) J_n(k_s a_c) - \zeta_s J_n(k_c a_c) J'_n(k_s a_c)}{\zeta_s J_n(k_c a_c) H_n^{(1)'}(k_s a_c) - \zeta_c J'_n(k_c a_c) H_n^{(1)}(k_s a_c)} \quad (2.11)$$

である。ここで、各領域の特性インピーダンスを  $\zeta_r = \sqrt{\mu_r/\varepsilon_r}$  ( $r = s, c$ ) とした。

本論文では完全導体については考察しないが、もし円柱が完全導体である場合では TM 波において

$$(\mathbf{T}_c)_{n,m} = -\delta_{n,m} \frac{J_n(k_s a_c)}{H_n^{(1)}(k_s a_c)} \quad (2.12)$$

であり、TE 波において

$$(\mathbf{T}_c)_{n,m} = -\delta_{n,m} \frac{J'_n(k_s a_c)}{H_n^{(1)'}(k_s a_c)} \quad (2.13)$$

である。

## 2.3 有限本数の円柱による電磁波散乱の解析

図 2.3 のように、前節で取り扱ったような円柱が有限本数存在し、円柱外に存在する波源から電磁波が入射する問題を考える。この構造による散乱界は、個々の

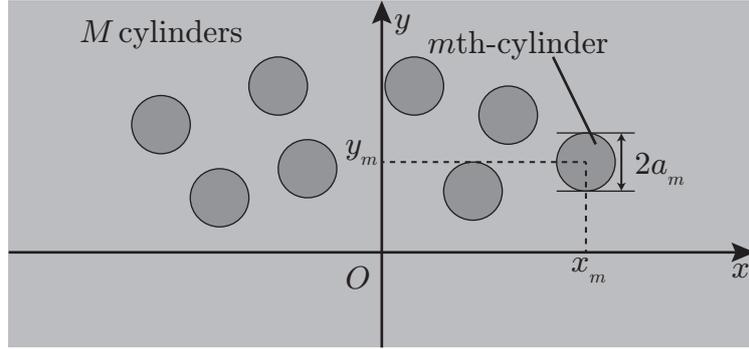


図 2.3: 円柱が有限本数置かれている状態

円柱の T-Matrix をもとに RTMA を用いることにより導出することができる [16]。ここでは、誘電率が  $\epsilon_s$ 、透磁率が  $\mu_s$  である空間中に、無限長の円柱が  $M$  本置かれている。ただし、 $m$  番目 ( $m = 1, \dots, M$ ) の円柱は誘電率が  $\epsilon_m$ 、透磁率が  $\mu_m$ 、半径が  $a_m$  で、中心の座標は  $(x_m, y_m)$  である。

入射界は  $m$  番目の円柱の中心を基点とした円筒波展開基底を用いると、

$$\psi^{(i)}(x, y) = \mathbf{g}^{(J)}(x - x_m, y - y_m)^t \mathbf{a}_m^{(i)} \quad (2.14)$$

と表すことができる。

また、この構造全体の散乱界は、それぞれの円柱の散乱界の和となるので、 $n$  番目の円柱による散乱界の展開係数を表す列行列を  $\mathbf{a}_n^{(s)}$  とすると、散乱界は

$$\psi^{(s)}(x, y) = \sum_{n=1}^M \mathbf{g}^{(H^{(1)})}(x - x_n, y - y_n)^t \mathbf{a}_n^{(s)} \quad (2.15)$$

と表すことができる。したがって全体界は、 $m$  番目の円柱の中心を基点とする円

筒波展開を用いると、式 (2.4) より

$$\begin{aligned}
\psi(x, y) &= \psi^{(i)}(x, y) + \psi^{(s)}(x, y) \\
&= \mathbf{g}^{(J)}(x - x_m, y - y_m)^t \mathbf{a}_m^{(i)} + \sum_{n=1}^M \mathbf{g}^{(H^{(1)})}(x - x_n, y - y_n)^t \mathbf{a}_n^{(s)} \\
&= \mathbf{g}^{(J)}(x - x_m, y - y_m)^t \left( \mathbf{a}_m^{(i)} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^M \mathbf{G}^{(H^{(1)})}(x_m - x_n, y_m - y_n)^t \mathbf{a}_n^{(s)} \right) \\
&\quad + \mathbf{g}^{(H^{(1)})}(x - x_m, y - y_m)^t \mathbf{a}_m^{(s)} \tag{2.16}
\end{aligned}$$

と表すことができる。式 (2.16) において、第 1 項を  $m$  番目の円柱に対する入射界、第 2 項を  $m$  番目の円柱による散乱界と考えることができる。 $m$  番目の円柱に関する T-Matrix は、式 (2.10) や (2.11) 中の下付き文字「 $c$ 」を「 $m$ 」に置き換えることによって与えられ、これを  $\mathbf{T}_m$  と書くことにする。この T-Matrix を用いると、 $m$  番目の円柱に対する入射界と散乱界の展開係数が、

$$\mathbf{a}_m^{(s)} = \mathbf{T}_m \left( \mathbf{a}_m^{(i)} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^M \mathbf{G}^{(H^{(1)})}(x_m - x_n, y_m - y_n)^t \mathbf{a}_n^{(s)} \right) \tag{2.17}$$

のように関係づけられる。散乱界に関する展開係数を左辺に、入射界に関する展開係数を右辺にまとめると、

$$\sum_{n=1}^M \mathbf{A}_{m,n} \mathbf{a}_n^{(s)} = \mathbf{a}_m^{(i)} \tag{2.18}$$

$$\mathbf{A}_{m,n} = \begin{cases} -\mathbf{G}^{(H^{(1)})}(x_m - x_n, y_m - y_n)^t & \text{for } m \neq n \\ \mathbf{T}_m^{-1} & \text{for } m = n \end{cases} \tag{2.19}$$

のようになるので、散乱界の展開係数は

$$\tilde{\mathbf{a}}^{(s)} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{a}}^{(i)} \quad (2.20)$$

によって計算できる。ただし、

$$\tilde{\mathbf{a}}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_M^{(i)} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}^{(s)} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{(s)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_M^{(s)} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \cdots & \mathbf{A}_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{M,1} & \cdots & \mathbf{A}_{M,M} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

である。式 (2.20) によって列行列  $\tilde{\mathbf{a}}^{(s)}$  を計算して各円柱による散乱波の展開係数を求めると、式 (2.15) より、円柱が有限本数存在するときの散乱界を得ることができる。

## 2.4 周期的に配列された円柱による平面波散乱の解析

円柱が周期的に配置された図 2.4 のような構造に、平面波が入射した場合を考える。背景媒質の誘電率は  $\varepsilon_s$ 、透磁率は  $\mu_s$  とし、配列されている円柱は無限長で、誘電率が  $\varepsilon_c$ 、透磁率が  $\mu_c$ 、半径が  $a_c$  であり、 $x$  方向に周期  $d$  で無限個置かれている。ただし、0 番目の円柱の中心の座標は  $(x_c, y_c)$  であるものとする。入射平面波

は、 $x$  軸方向から反時計回りに取った入射角を  $\phi_i$ 、振幅を 1 とすると、

$$\psi^{(i)}(x, y) = e^{i(\alpha_0 x - \beta_0 y)} \quad (2.24)$$

と表すことができる。ただし、

$$\alpha_0 = -k_s \cos \phi_i \quad (2.25)$$

$$\beta_0 = k_s \sin \phi_i \quad (2.26)$$

である。

入射界は、有限本数の円柱による場合と同様に考えて、 $m$  番目の円柱の中心を基点とした円筒波展開基底を用いると、

$$\psi^{(i)}(x, y) = \mathbf{g}^{(J)}(x - x_c - md, y - y_c)^t \mathbf{a}_m^{(i)} \quad (2.27)$$

と表すこともできる。ただし、 $\mathbf{a}_m^{(i)}$  の  $n$  番目の要素は

$$(\mathbf{a}_m^{(i)})_n = \left( \frac{i\alpha_0 - \beta_0}{k_s} \right) e^{i[\alpha_0(x_c + md) - \beta_0 y_c]} \quad (2.28)$$

である。一方、散乱界は、 $n$  番目の円柱による散乱係数行列を  $\mathbf{a}_n^{(s)}$  とすると、

$$\psi^{(s)}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^{(H^{(1)})}(x - x_c - nd, y - y_c)^t \mathbf{a}_n^{(s)} \quad (2.29)$$

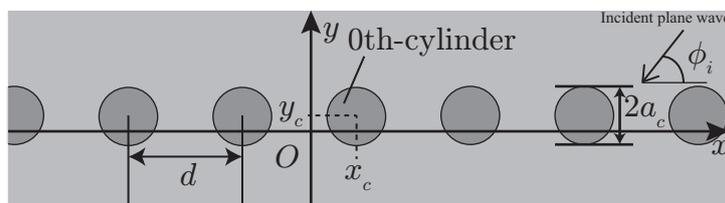


図 2.4: 円柱が周期的に置かれている状態

と表現できる。全体界は、 $m$  番目の円柱の中心を基点とすると、

$$\begin{aligned}
\psi(x, y) &= \psi^{(i)}(x, y) + \psi^{(s)}(x, y) \\
&= \mathbf{g}^{(J)}(x - x_c - md, y - y_c)^t \mathbf{a}_m^{(i)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^{(H^{(1)})}(x - x_c - nd, y - y_c)^t \mathbf{a}_n^{(s)} \\
&= \mathbf{g}^{(J)}(x - x_c - md, y - y_c)^t \left( \mathbf{a}_m^{(i)} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{\infty} \mathbf{G}^{(H^{(1)})}((m-n)d, 0)^t \mathbf{a}_n^{(s)} \right) \\
&\quad + \mathbf{g}^{(H^{(1)})}(x - x_c - md, y - y_c)^t \mathbf{a}_m^{(s)} \tag{2.30}
\end{aligned}$$

のように表すことができる。式(2.30)において、第1項は $m$ 番目の円柱に対する入射界、第2項は $m$ 番目の円柱による散乱界、と考えることができるので、T-Matrixを用いて関係づけることができ

$$\mathbf{a}_m^{(s)} = \mathbf{T}_c \left( \mathbf{a}_m^{(i)} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{\infty} \mathbf{G}^{(H^{(1)})}((m-n)d, 0)^t \mathbf{a}_n^{(s)} \right) \tag{2.31}$$

と表現できる。

式(2.31)は、前節の式(2.17)と似た形をしているが、各円柱による散乱界の展開係数を表す列行列 $\{\mathbf{a}_n^{(s)}\}$ が無数個あることになり、前節の方法では対応できない。Rousselら[23]は、Floquetの定理に基づいた定式化を行うことで、この問題を解決する方法を提案している。周期構造に平面波が入射している本節で考えているような問題では、Floquetの定理によると、散乱界は

$$\psi^{(s)}(x - d, y) = \psi^{(s)}(x, y) e^{-ida_0} \tag{2.32}$$

という擬周期性を示す。これを各円柱による散乱界の和で記述される本節の表現に適用すると、 $n$ 番目の円柱による散乱界の展開係数 $\mathbf{a}_n^{(s)}$ と0番目の円柱による散

乱界の展開係数  $\mathbf{a}_0^{(s)}$  の間に

$$\mathbf{a}_n^{(s)} = \mathbf{a}_0^{(s)} e^{ind\alpha_0} \quad (2.33)$$

のような関係が成り立っていることが分かる。式 (2.31) は、この関係式を用いると、 $m = 0$  に対して

$$\mathbf{a}_0^{(s)} = \mathbf{T}_c \left( \mathbf{a}_0^{(i)} + \mathbf{L} \mathbf{a}_0^{(s)} \right) \quad (2.34)$$

のようになる。ただし、式中の行列  $\mathbf{L}$  は

$$\mathbf{L} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \mathbf{G}^{(H^{(1)})}(-nd, 0)^t e^{ind\alpha_0} \quad (2.35)$$

である。式 (2.34) より、0 番目の円柱による散乱界の展開係数は

$$\mathbf{a}_0^{(s)} = (\mathbf{T}_c^{-1} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{a}_0^{(i)} \quad (2.36)$$

で与えられる。式 (2.35) で与えられた行列  $\mathbf{L}$  の要素は Lattice sums と呼ばれており、直接計算すると収束が非常に遅い性質を持つことが知られているが、安元ら [24] によって考案された手法を用いることで効率的に計算することができる。

式 (2.29) に式 (2.33) を代入すると、散乱界は

$$\psi^{(s)}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^{(H^{(1)})}(x - x_c - nd, y - y_c)^t e^{ind\alpha_0} \mathbf{a}_0^{(s)} \quad (2.37)$$

と表すことができるが、この無限級数もまた直接計算すると収束が非常に遅く、別の表現を求めることが必要である。散乱界は、式 (2.32) に示したような擬周期性

を持つので、

$$\psi^{(s)}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n^{(s)}(y) e^{i\alpha_n x} \quad (2.38)$$

のように一般 Fourier 級数展開によって表現することが出来る。ただし、

$$\alpha_n = \alpha_0 + n \frac{2\pi}{d} \quad (2.39)$$

である。散乱界は、背景媒質中では

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_s^2 \right) \psi^{(s)}(x, y) = 0 \quad (2.40)$$

という Helmholtz 方程式を満足するので、 $n$  番目の要素が

$$(\mathbf{f}^{(\pm)}(x, y))_n = e^{i(\alpha_n x \pm \beta_n y)} \quad (2.41)$$

である列行列  $\mathbf{f}^{(\pm)}(x, y)$  によって基底が表現される平面波展開を用いて表現されることになる。ただし、

$$\beta_n = \sqrt{k_s^2 - \alpha_n^2} \quad (2.42)$$

であり、上付き括弧内の符号は平面波の伝搬方向で、 $+y$  方向または  $-y$  方向であることを表している。円柱関数  $Z$  の微分に関する関係式

$$g_n^{(Z)}(x, y) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{k_s^n} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n Z_0(k_s \rho(x, y)) & \text{for } n \geq 0 \\ k_s^n \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^{-n} Z_0(k_s \rho(x, y)) & \text{for } n < 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

と、0次の第1種 Hankel 関数の積分表示

$$H_0^{(1)}(k_s \rho(x, y)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k_s^2 - \eta^2}} e^{i(\eta x + \sqrt{k_s^2 - \eta^2} |y|)} d\eta \quad (2.44)$$

及び、Dirac のデルタの関係式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ind\eta} = \frac{2\pi}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\eta - n\frac{2\pi}{d}\right) \quad (2.45)$$

を用いると、式 (2.29) 散乱界の平面波展開表現は、

$$\psi^{(s)}(x, y) = \begin{cases} \mathbf{f}^{(+)}(x, y - y_c)^t \mathbf{B}^{(+)} \mathbf{a}_0^{(s)} & \text{for } y \geq y_c \\ \mathbf{f}^{(-)}(x, y - y_c)^t \mathbf{B}^{(-)} \mathbf{a}_0^{(s)} & \text{for } y < y_c \end{cases} \quad (2.46)$$

のようになることが分かる。ただし、式中の行列  $\mathbf{B}^{(\pm)}$  は、 $n$  行  $m$  列の要素が

$$(\mathbf{B}^{(\pm)})_{n,m} = \frac{2}{d\beta_n} \left( \frac{-i\alpha_n \pm \beta_n}{k_s} \right)^m e^{-i\alpha_n x_c} \quad (2.47)$$

で与えられる。

## 2.5 周期的円柱配列の多層構造による平面波散乱の解析

図 2.5 のような周期的円柱配列の多層構造に、平面波が入射角  $\phi_i$  で入射した場合の散乱問題を考える。円柱は、誘電率が  $\epsilon_s$ 、透磁率が  $\mu_s$  である空間中に配置されており、 $x$  方向に同一の周期  $d$  を持つ周期的円柱配列が  $y$  方向に  $L$  層積み重なっている。円柱の中心が  $y = y_l$  である円柱配列のことを第  $l$  層と呼ぶことにすると、この第  $l$  層の円柱配列は、誘電率が  $\epsilon_l$ 、透磁率が  $\mu_l$ 、半径が  $a_l$  である同一の無限長円柱が、 $x$  方向に周期  $d$  で置かれており、その中の 0 番目の円柱は中心座標が  $(x_l, y_l)$  であるものとする。

多層構造に対する解析では、まず、前節の定式化により、個々の層のみが存在するとして、それぞれに平面波が入射した場合の散乱行列（S-Matrix）を計算する。次にそれぞれの層の境界面において境界条件を順次整合させていき、考察する構造を拡大していく。このように再帰的に計算を行うことによって、最終的に構造全体の散乱行列を得ることになる。

平面波展開基底として用いるのは前節の式 (2.46) で定義される列行列で、

$$\psi(x, y) = \mathbf{f}^{(+)}(x, y - y')^t \boldsymbol{\psi}^{(+)}(y') + \mathbf{f}^{(-)}(x, y - y')^t \boldsymbol{\psi}^{(-)}(y') \quad (2.48)$$

のように電磁界を表現することにする。式中の  $\boldsymbol{\psi}^{(+)}(y')$  及び  $\boldsymbol{\psi}^{(-)}(y')$  はそれぞれ  $+y$  方向及び  $-y$  方向に伝搬する平面波の  $y = y'$  における振幅からなる列行列である。ここで、平面波展開基底について以下の関係式が成り立つ。

$$\mathbf{f}^{(\pm)}(x, y - y_p) = \mathbf{V}(\pm(y_q - y_p)) \mathbf{f}^{(\pm)}(x, y - y_q) \quad (2.49)$$

ただし、 $\mathbf{V}(y)$  は

$$(\mathbf{V}(y))_{n,m} = \delta_{n,m} e^{i\beta_n y} \quad (2.50)$$

によって  $n$  行  $m$  列の要素が与えられる対角行列である。また、平面波展開基底と

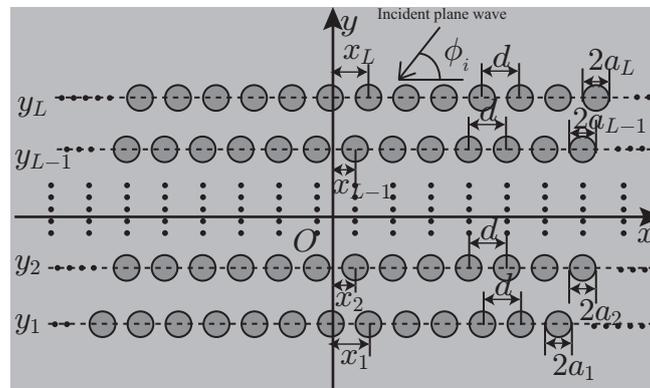


図 2.5: 周期的円柱配列が多層構造をなしている状態

円筒波展開基底の間には

$$\mathbf{f}^{(\pm)}(x, y - y_l)^t = \mathbf{g}^{(J)}(x - x_l, y - y_l)^t \mathbf{C}_l^{(\pm)} \quad (2.51)$$

$$\left( \mathbf{C}_l^{(\pm)} \right)_{n,m} = \left( \frac{i\alpha_m \pm \beta_m}{k_s} \right)^n e^{i\alpha_m x_l} \quad (2.52)$$

という関係式が成り立つ。

第  $l$  層の周期的円柱配列に対する入射界  $\psi_l^{(i)}(x, y)$  は、

$$\psi_l^{(i)}(x, y) = \mathbf{f}^{(-)}(x, y - y_l)^t \boldsymbol{\psi}^{(-)}(y_l + 0) + \mathbf{f}^{(+)}(x, y - y_l)^t \boldsymbol{\psi}^{(+)}(y_l - 0) \quad (2.53)$$

で与えられる。式 (2.51) を用いて、0 番目の円柱の中心を基点とした円筒波展開基底を用いた表現に変換すると、この入射界は

$$\psi_l^{(i)}(x, y) = \mathbf{g}^{(J)}(x - x_l, y - y_l)^t \mathbf{a}_{l,0}^{(i)} \quad (2.54)$$

のように書ける。ただし、展開係数を表す列行列  $\mathbf{a}_{l,0}^{(i)}$  は

$$\mathbf{a}_{l,0}^{(i)} = \mathbf{C}_l^{(-)} \boldsymbol{\psi}^{(-)}(y_l + 0) + \mathbf{C}_l^{(+)} \boldsymbol{\psi}^{(+)}(y_l - 0) \quad (2.55)$$

である。前節と同じように考えると、第  $l$  層による散乱界  $\psi_l^{(s)}(x, y)$  は

$$\psi_l^{(s)}(x, y) = \begin{cases} \mathbf{f}^{(+)}(x, y - y_l)^t \mathbf{B}_l^{(+)} (\mathbf{T}_l^{-1} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{a}_{l,0}^{(i)} & \text{for } y \geq y_l \\ \mathbf{f}^{(-)}(x, y - y_l)^t \mathbf{B}_l^{(-)} (\mathbf{T}_l^{-1} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{a}_{l,0}^{(i)} & \text{for } y < y_l \end{cases} \quad (2.56)$$

のようになる。式中の行列  $\mathbf{T}_l$  は第  $l$  層に含まれる円柱に関する T-Matrix で、式 (2.10) や (2.11) 中の下付き文字「 $c$ 」を「 $l$ 」に置き換えることによって与えられる。

また  $\mathbf{B}_l^{(\pm)}$  は、その  $n$  行  $m$  列の要素が

$$\left(\mathbf{B}_l^{(\pm)}\right)_{n,m} = \frac{2}{d\beta_n} \left(\frac{-i\alpha_n \pm \beta_n}{k_s}\right)^m e^{-i\alpha_n x_l} \quad (2.57)$$

で与えられる行列である。式 (2.53)、(2.55)、(2.56) より、第  $l$  層の円柱配列から外向きに伝搬する平面波の振幅は、

$$\begin{pmatrix} \psi^{(+)}(y_l + 0) \\ \psi^{(-)}(y_l - 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{l,11} & \mathbf{S}_{l,12} \\ \mathbf{S}_{l,21} & \mathbf{S}_{l,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^{(-)}(y_l + 0) \\ \psi^{(+)}(y_l - 0) \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

で与えられることになる。ただし、式中の第  $l$  層の円柱配列の S-Matrix は、

$$\mathbf{S}_{l,11} = \mathbf{B}_l^{(+)} (\mathbf{T}_l^{-1} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{C}_l^{(-)} \quad (2.59)$$

$$\mathbf{S}_{l,12} = \mathbf{B}_l^{(+)} (\mathbf{T}_l^{-1} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{C}_l^{(+)} + \mathbf{I} \quad (2.60)$$

$$\mathbf{S}_{l,21} = \mathbf{B}_l^{(-)} (\mathbf{T}_l^{-1} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{C}_l^{(-)} + \mathbf{I} \quad (2.61)$$

$$\mathbf{S}_{l,22} = \mathbf{B}_l^{(-)} (\mathbf{T}_l^{-1} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{C}_l^{(+)} \quad (2.62)$$

である。

また、第  $l$  層と第  $l'$  層 ( $l \leq l'$ ) に関して

$$\begin{pmatrix} \psi^{(+)}(y_{l'} + 0) \\ \psi^{(-)}(y_{l'} - 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11}^{(l,l')} & \mathbf{S}_{12}^{(l,l')} \\ \mathbf{S}_{21}^{(l,l')} & \mathbf{S}_{22}^{(l,l')} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^{(-)}(y_{l'} + 0) \\ \psi^{(+)}(y_{l'} - 0) \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

のように新たな S-Matrix を定義する。この S-Matrix の初期行列  $\mathbf{S}_{pq}^{(l,l)}$  ( $p, q = 1, 2$ ) は、式 (2.58) より

$$\mathbf{S}_{pq}^{(l,l)} = \mathbf{S}_{l,pq} \quad (2.64)$$

で与えられ、 $l' > l$ に対応する  $\mathbf{S}_{pq}^{(l,l')}$  は

$$\mathbf{S}_{11}^{(l,l')} = \mathbf{S}_{l',11} + \mathbf{S}_{l',12} \mathbf{M}_1 \mathbf{S}_{l',21} \quad (2.65)$$

$$\mathbf{S}_{12}^{(l,l')} = \mathbf{S}_{l',12} \mathbf{M}_2 \quad (2.66)$$

$$\mathbf{S}_{21}^{(l,l')} = \mathbf{M}_3 (\mathbf{I} + \mathbf{S}_{l',22} \mathbf{M}_1) \mathbf{S}_{l',21} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{S}_{22}^{(l,l')} = \mathbf{S}_{22}^{(l,l'-1)} + \mathbf{M}_3 \mathbf{S}_{l',22} \mathbf{M}_2 \quad (2.68)$$

のように表すことができる。ただし、

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{V}(t_{l'}) \left( \mathbf{I} - \mathbf{S}_{11}^{(l,l'-1)} \mathbf{V}(t_{l'}) \mathbf{S}_{l',22} \mathbf{V}(t_{l'}) \right)^{-1} \mathbf{S}_{11}^{(l,l'-1)} \mathbf{V}(t_{l'}) \quad (2.69)$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{V}(t_{l'}) \left( \mathbf{I} - \mathbf{S}_{11}^{(l,l'-1)} \mathbf{V}(t_{l'}) \mathbf{S}_{l',22} \mathbf{V}(t_{l'}) \right)^{-1} \mathbf{S}_{12}^{(l,l'-1)} \quad (2.70)$$

$$\mathbf{M}_3 = \mathbf{S}_{21}^{(l,l'-1)} \mathbf{V}(t_{l'}) \quad (2.71)$$

$$t_{l'} = y_{l'} - y_{l'-1} \quad (2.72)$$

である。これは、第  $l$  層から第  $l' - 1$  層までの円柱配列を積み重ねた多層構造の散乱行列と、第  $l'$  層の散乱行列を用いて、第  $l$  層から第  $l'$  層までの円柱配列を積み重ねた多層構造の散乱行列を再帰的に求めることができることを示している。第 1 層から第  $L$  層までの円柱配列を積み重ねた多層構造の散乱行列  $\mathbf{S}_{pq}^{(1,L)}$  が計算できれば、式 (2.48)、(2.64)、(2.63) より、 $y < y_1$  と  $y > y_L$  の領域における散乱界が得られることになる。

## 2.6 フォトニック結晶導波路中を伝搬する Floquet モードの解析

周期的円柱の多層構造は、円柱の媒質や半径、配列する周期をうまく選ぶと、フォトニック結晶とすることができ、多層構造内を電磁波が伝搬できなくなる。こ

のフォトニック結晶の多層構造中に、図 2.6 のように少し層間の間隔が広い部分を設けると、電磁界がここに閉じ込められることになり、この部分が導波路として機能する。構造は導波方向に周期性を保っているので、この導波路を伝搬する固有モードは、擬周期性を有する Floquet モードである。前節の周期的円柱配列の多層構造による平面波散乱問題の定式化を利用すると、この様なフォトニック結晶導波路中を導波する Floquet モードの解析を行うことができる [5]。構造に関する記号には、前節と同じものを用いることにする。また、間隔を広くして導波部とするのを第  $L'$  層と  $L' + 1$  層の間とし ( $1 < L', L' + 1 < L$ )、 $y < y_1$  の領域を  $+y$  方向に伝搬したり、 $y > y_L$  の領域を  $-y$  方向に伝搬する電磁界は無い場合を考える。導波部を  $x$  方向に伝搬する Floquet モードの伝搬定数を  $\xi$  とすると、Floquet モード電磁界は

$$\psi(x - d, y) = \psi(x, y)e^{-id\xi} \quad (2.73)$$

という擬周期性を持つので、式 (2.39) 中の  $\alpha_0$  を  $\xi$  に置き換えれば、前節で示した計算方法で第 1 層から第  $L'$  層までの円柱配列を積み重ねた多層構造の散乱行列と、

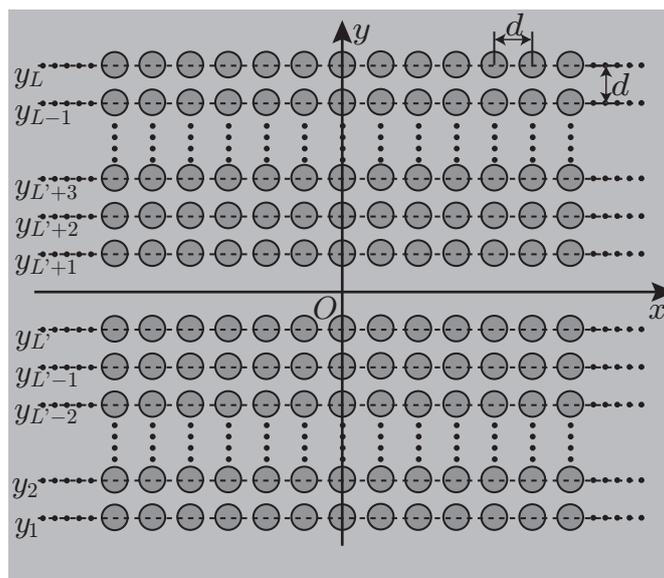


図 2.6: 直線状フォトニック結晶導波路

第  $L' + 1$  層から第  $L$  層までの円柱配列を積み重ねた多層構造の散乱行列を求めることができる。

式 (2.63) より、平面波の  $y = y_{L'} + 0$  及び  $y = y_{L'+1} - 0$  における振幅の関係は

$$\boldsymbol{\psi}^{(+)}(y_{L'} + 0) = \mathbf{S}_{11}^{(1,L')} \boldsymbol{\psi}^{(-)}(y_{L'} + 0) \quad (2.74)$$

$$\boldsymbol{\psi}^{(-)}(y_{L'+1} - 0) = \mathbf{S}_{22}^{(L'+1,L)} \boldsymbol{\psi}^{(+)}(y_{L'+1} - 0) \quad (2.75)$$

のように書ける。また、式 (2.48) と (2.49) より

$$\boldsymbol{\psi}^{(+)}(y_{L'+1} - 0) = \mathbf{V}(t_{L'+1}) \boldsymbol{\psi}^{(+)}(y_{L'} + 0) \quad (2.76)$$

$$\boldsymbol{\psi}^{(-)}(y_{L'} + 0) = \mathbf{V}(t_{L'+1}) \boldsymbol{\psi}^{(-)}(y_{L'+1} - 0) \quad (2.77)$$

という関係が成り立つので、これらの式をまとめると、

$$\left( \mathbf{S}_{11}^{(1,L')} \mathbf{V}(t_{L'+1}) \mathbf{S}_{22}^{(L'+1,L)} \mathbf{V}(t_{L'+1}) - \mathbf{I} \right) \boldsymbol{\psi}^{(+)}(y_{L'} + 0) = \mathbf{0} \quad (2.78)$$

という関係式が得られる。この式が  $\boldsymbol{\psi}^{(+)}(y_{L'} + 0) = \mathbf{0}$  でない解を持つためには、

$$\det \left( \mathbf{S}_{11}^{(1,L')} \mathbf{V}(t_{L'+1}) \mathbf{S}_{22}^{(L'+1,L)} \mathbf{V}(t_{L'+1}) - \mathbf{I} \right) = 0 \quad (2.79)$$

満たす必要がある。この式が Floquet モードの分散方程式を与えることになる。導波部への電磁界の閉じ込めが十分になる層数を考えて、この分散方程式を伝搬定数  $\xi$  について数値的に解くと、導波 Floquet モード電磁界を高精度に計算できる。

## 第3章 周期境界条件を用いた解析法

この章では、円柱により構成された、2次元フォトニック結晶導波路デバイス構造の入出力特性解析について、周期境界条件を使用した解析手法を提案する。この提案手法では、電磁界の主たる伝搬方向と垂直に仮想周期を導入して、電磁界を Fourier 級数展開によって表現する。また、円柱配列が電磁界の導波方向に多層構造をなしていると考え、構造全体の伝搬特性を各層の縦続接続により得る [15]。各層に含まれる円柱による散乱の効果は、RTMA [16] を併用して定式化に取り込む。入出力路部分では、同一構造の層が伝搬方向に繰り返される構造となっていることから、1層の伝達行列を求めて固有値解析を行うことによって、導波モードだけでなくエバネッセントモードまで含めた Floquet モードを計算することができる。得られた Floquet モードを用いた固有モード展開によって与えられる入出力端境界条件のもとで、デバイス構造部を構成する円柱配列の多層構造の伝搬特性を計算する。

### 3.1 解析対象の設定

$z$  方向に無限に長い円柱を並べて作られた 2次元フォトニック結晶を基本とした、図 3.1 の様な導波路デバイス構造中を伝搬する電磁界について考える。基本となるフォトニック結晶は、円柱を  $x$  方向には間隔  $d$  で  $M$  本、 $y$  方向には間隔  $h$  で無限に、方形格子状に並べたもので、円柱中心が  $(x, y) = (nd - d/2, lh - h/2)$  ( $n = 1, \dots, M, l$  は任意の整数) で与えられるものとする。導波路デバイス構造は、これから適当な円柱を取り除くなどによって構成されるが、 $x$  方向の端部に十分な

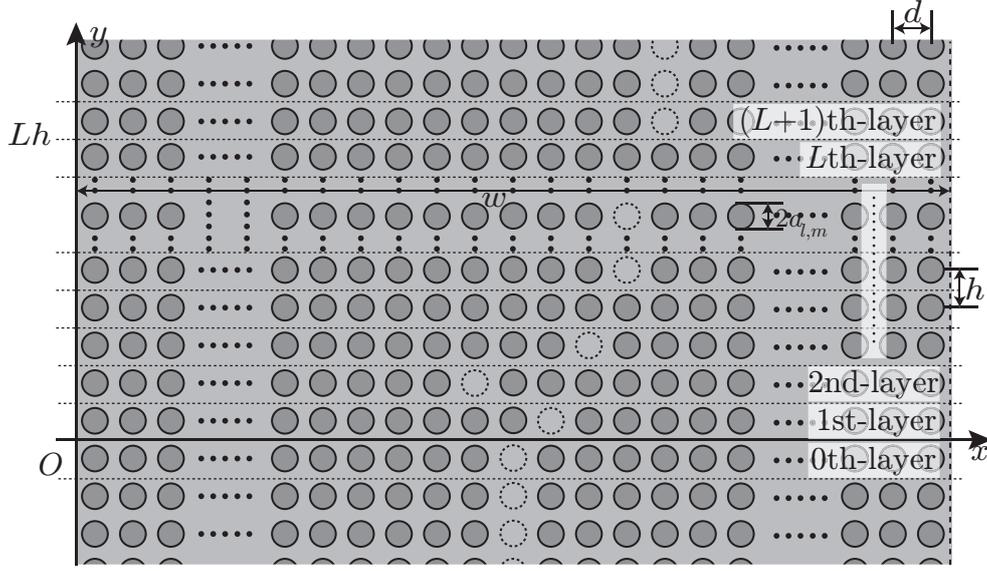


図 3.1: 考察対象

フォトニック結晶の層が残され、 $x < 0$  及び  $x > Md$  の領域への漏洩が十分に小さいものとする。中心が  $y = lh - h/2$  面上に中心がある円柱を第  $l$  層の円柱と呼ぶことにするが、適当に円柱が取り除かれているために、第  $l$  層の円柱の数  $M_l$  は  $M$  以下である。第  $l$  層の  $m$  番目の円柱の半径、誘電率、透磁率をそれぞれ  $a_{l,m}$ 、 $\varepsilon_{l,m}$ 、 $\mu_{l,m}$  とし、中心の座標を  $(x, y) = (x_{l,m}, lh - h/2)$  と書くことにする。構造は大きく分けて3つの部分から成っている。 $y < 0$  と  $y > Lh$  は、入出力に用いる導波路部分であり、 $y$  方向に直線上の欠陥を持つ。 $0 \leq y \leq Lh$  では適当な部分に欠陥が存在する層が  $y$  方向に  $L$  層積み重なっている。本論文ではこの部分を遷移領域と呼ぶことにする。本章の定式化では、図 3.1 のように  $x$  方向に仮想周期  $w = Md$  の周期境界条件を導入する。これにより、電磁界を複素 Fourier 級数展開によって表現できることになるが、背景媒質中の電磁界は、Helmholtz 方程式を満足するので、更に平面波展開によって表現できることになる。本章では、平面波展開基底を  $n$  番目の要素が

$$(\mathbf{f}^{(\pm)}(x, y))_n = e^{i(\alpha_n x \pm \beta_n y)} \quad (3.1)$$

で与えられる列行列で表現することとする。ただし、

$$\alpha_n = n \frac{2\pi}{w} \quad (3.2)$$

$$\beta_n = \sqrt{k_s^2 - \alpha_n^2} \quad (3.3)$$

である。

### 3.2 各層の円柱配列による散乱

図 3.2 のような、第  $l$  層の  $M^{(l)}$  本の円柱による電磁波散乱について考える。この円柱配列に対する入射界は、 $y = (l-1)h$  面から  $+y$  方向に伝搬してくる平面波と、 $y = lh$  面から  $-y$  方向に伝搬してくる平面波の重ね合わせであるので、

$$\psi^{(i)}(x, y) = \mathbf{f}^{(+)}(x, y - (l-1)h)^t \boldsymbol{\psi}^{(+)}((l-1)h) + \mathbf{f}^{(-)}(x, y - lh)^t \boldsymbol{\psi}^{(-)}(lh) \quad (3.4)$$

で与えられる。平面波は Bessel 関数による円筒波展開ができるので、 $m$  番目の円柱の中心  $(x_{l,m}, (l-1/2)h)$  を基点とすると、

$$\psi^{(i)}(x, y) = \mathbf{g}^{(j)}(x - x_{l,m}, y - (l-1/2)h)^t \mathbf{a}_{l,m}^{(i)} \quad (3.5)$$

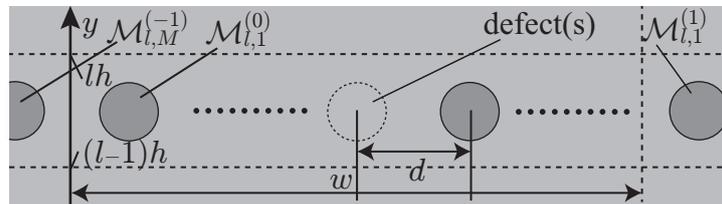


図 3.2: 1層のみ存在する構造

と表される。ただし、

$$\mathbf{a}_{l,m}^{(i)} = \mathbf{C}_{l,m}^{(+)} \psi^{(+)}((l-1)h) + \mathbf{C}_{l,m}^{(-)} \psi^{(-)}(lh) \quad (3.6)$$

$$\left( \mathbf{C}_{l,m}^{(\pm)} \right)_{p,q} = \left( \frac{i\alpha_q \pm \beta_q}{k_s} \right)^p e^{i(\alpha_q x_{l,m} + \beta_q h/2)} \quad (3.7)$$

である。一方、円柱による散乱界は、仮想周期を導入したことによる  $x$  方向の周期性を考慮すると、

$$\psi^{(s)}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{M_l} \mathbf{g}^{(H^{(1)})}(x - x_{l,\nu} - nw, y - (l-1/2)h)^t \mathbf{a}_{l,\nu}^{(s)} \quad (3.8)$$

と書ける。ただし、 $\mathbf{a}_{l,\nu}^{(s)}$  は、第  $l$  層  $\nu$  番目の円柱による散乱界の展開係数を要素とする列行列である。

ここで、 $n = -1, 0, 1$  及び  $\rho_{l,m,\nu}^{(n)} = |x_{l,m} - x_{l,\nu} - nw|$  に対して、 $\nu = 1, \dots, M_l$  の部分集合  $\mathcal{M}_{l,m}(n)$  を以下の様に定義する。

$$\mathcal{M}_{l,m}^{(n)} = \{\nu | \rho_{l,m,\nu}^{(n)} = \min\{\rho_{l,m,\nu}^{(-1)}, \rho_{l,m,\nu}^{(0)}, \rho_{l,m,\nu}^{(1)}\}\} \quad (3.9)$$

これは、仮想周期を導入しているため、 $m$  番目の円柱が  $\nu$  番目の円柱から受ける影響を考慮する際、周期  $w$  で存在する  $\nu$  番目の円柱のうち、最も  $m$  番目の円柱に近いものを選ぶためのものである。ただし、等距離のものがある場合は、 $\mathcal{M}_{l,m}^{(-1)}$ 、 $\mathcal{M}_{l,m}^{(0)}$ 、 $\mathcal{M}_{l,m}^{(1)}$  のうちどれか一つにしか属さないように  $\nu$  を選ぶことにする。 $m$  番

目の円柱付近の全体界は、式 (2.4)、(2.5) を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
\psi(x, y) &= \psi^{(i)}(x, y) + \psi^{(s)}(x, y) \\
&= \psi^{(i)}(x, y) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{M_l} \mathbf{g}^{(H^{(1)})}(x - x_{l,\nu} - nw, y - (l - 1/2)h)^t \mathbf{a}_{l,\nu}^{(s)} \\
&= \psi^{(i)}(x, y) \\
&\quad + \sum_{\nu \in \mathcal{M}_{l,m}^{(-1)}} \left( \mathbf{g}^{(J)}(x - x_{l,\nu} + w, y - (l - 1/2)h)^t \mathbf{L} \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + \mathbf{g}^{(H^{(1)})}(x - x_{l,\nu} + w, y - (l - 1/2)h)^t \right) \mathbf{a}_{l,\nu}^{(s)} \\
&\quad + \sum_{\nu \in \mathcal{M}_{l,m}^{(0)}} \left( \mathbf{g}^{(J)}(x - x_{l,\nu}, y - (l - 1/2)h)^t \mathbf{L} \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + \mathbf{g}^{(H^{(1)})}(x - x_{l,\nu}, y - (l - 1/2)h)^t \right) \mathbf{a}_{l,\nu}^{(s)} \\
&\quad + \sum_{\nu \in \mathcal{M}_{l,m}^{(1)}} \left( \mathbf{g}^{(J)}(x - x_{l,\nu} - w, y - (l - 1/2)h)^t \mathbf{L} \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + \mathbf{g}^{(H^{(1)})}(x - x_{l,\nu} - w, y - (l - 1/2)h)^t \right) \mathbf{a}_{l,\nu}^{(s)} \\
&= \mathbf{g}^{(J)}(x - x_{l,m}, y - (l - 1/2)h)^t \\
&\quad \times \left[ \mathbf{a}_{l,m}^{(i)} + \mathbf{L} \mathbf{a}_{l,m}^{(s)} + \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq m}}^{M_l} \left( \mathbf{G}_{l,m,\nu}^{(J)} \mathbf{L} + \mathbf{G}_{l,m,\nu}^{(H^{(1)})} \right) \mathbf{a}_{l,\nu}^{(s)} \right] \\
&\quad + \mathbf{g}^{(H^{(1)})}(x - x_{l,m}, y - (l - 1/2)h)^t \mathbf{a}_{l,m}^{(s)} \tag{3.10}
\end{aligned}$$

ただし、

$$\mathbf{L} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \mathbf{G}^{(H^{(1)})}(-nw, 0)^t \tag{3.11}$$

$$\mathbf{G}_{m,\nu}^{(l,Z)} = \begin{cases} \mathbf{G}^{(Z)}(x_{l,m} - x_{l,\nu} + w, 0)^t & \text{for } \nu \in \mathcal{M}_{l,m}^{(-1)} \\ \mathbf{G}^{(Z)}(x_{l,m} - x_{l,\nu}, 0)^t & \text{for } \nu \in \mathcal{M}_{l,m}^{(0)} \\ \mathbf{G}^{(Z)}(x_{l,m} - x_{l,\nu} - w, 0)^t & \text{for } \nu \in \mathcal{M}_{l,m}^{(1)} \end{cases} \quad (3.12)$$

である。これらの展開係数間の関係は、前述のように T-Matrix によって、

$$\mathbf{a}_{l,m}^{(s)} = \mathbf{T}_{l,m} \left[ \mathbf{a}_m^{(i)} + \mathbf{L} \mathbf{a}_{l,m}^{(s)} + \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq m}}^{M_l} \left( \mathbf{G}_{l,m,\nu}^{(J)} \mathbf{L} + \mathbf{G}_{l,m,\nu}^{(H^{(1)})} \right) \mathbf{a}_{l,\nu}^{(s)} \right] \quad (3.13)$$

のように表される。ただし、第  $l$  層  $m$  番目の円柱に関する T-Matrix を  $\mathbf{T}_{l,m}$  とした。この関係式より、散乱界の係数行列が

$$\tilde{\mathbf{a}}_l^{(s)} = \tilde{\mathbf{A}}_l^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_l^{(i)} \quad (3.14)$$

によって与えられることが分かる。ただし、

$$\tilde{\mathbf{a}}_l^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{l,1}^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{l,M_l}^{(i)} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_l^{(s)} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{l,1}^{(s)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{l,M_l}^{(s)} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_l = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{l,1,1} & \cdots & \mathbf{A}_{l,1,M_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{l,M_l,1} & \cdots & \mathbf{A}_{l,M_l,M_l} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{A}_{l,m,p} = \begin{cases} \mathbf{T}_{l,m}^{-1} - \mathbf{L} & \text{for } n \geq 0 \\ \mathbf{G}_{l,m,p}^{(J)} \mathbf{L} - \mathbf{G}_{l,m,p}^{(H^{(1)})} & \text{for } n < 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

である。

式 (3.8) で与えられていた、散乱界は

$$\psi^{(s)}(x, y) = \begin{cases} \mathbf{f}^{(+)}(x, y + lh)^t \boldsymbol{\psi}^{(s,+)}((l-1)h) & \text{for } y > 0 \\ \mathbf{f}^{(-)}(x, y + (l-1)h)^t \boldsymbol{\psi}^{(s,-)}(lh) & \text{for } y < 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

のように平面波展開でも表すことができる。ただし、 $\boldsymbol{\psi}^{(s,+)}((l-1)h)$  と  $\boldsymbol{\psi}^{(s,-)}(lh)$  は、それぞれ  $y = (l-1)h$  と  $y = lh$  における散乱波の平面波振幅からなる列行列で、円筒波展開の展開係数とは、

$$\boldsymbol{\psi}^{(s,+)}((l-1)h) = \sum_{m=1}^{M_l} \mathbf{B}_{l,m}^{(+)} \mathbf{a}_{l,m}^{(s)} \quad (3.20)$$

$$\boldsymbol{\psi}^{(s,-)}(lh) = \sum_{m=1}^{M_l} \mathbf{B}_{l,m}^{(-)} \mathbf{a}_{l,m}^{(s)} \quad (3.21)$$

$$\left( \mathbf{B}_{l,m}^{(\pm)} \right)_{p,q} = \frac{2 e^{-i(\alpha_p x_{l,m} - \beta_p h/2)}}{w \beta_p} \left( \frac{-i \alpha_p \pm \beta_p}{k_s} \right)^q \quad (3.22)$$

のような関係である。

以上より、 $y = (l-1)h$  と  $y = lh$  から第  $l$  層に入ってくる平面波と出て行く平面波の振幅の関係は、散乱行列を用いて

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}^{(+)}(lh) \\ \boldsymbol{\psi}^{(-)}((l-1)h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{l,11} & \mathbf{S}_{l,12} \\ \mathbf{S}_{l,21} & \mathbf{S}_{l,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}^{(-)}(lh) \\ \boldsymbol{\psi}^{(+)}((l-1)h) \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

と表すことができる。ただし、

$$\mathbf{S}_{l,11} = \tilde{\mathbf{B}}_l^{(+)} \tilde{\mathbf{A}}_l^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_l^{(-)} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{S}_{l,12} = \tilde{\mathbf{B}}_l^{(+)} \tilde{\mathbf{A}}_l^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_l^{(+)} + \mathbf{V}(h) \quad (3.25)$$

$$\mathbf{S}_{l,21} = \tilde{\mathbf{B}}_l^{(-)} \tilde{\mathbf{A}}_l^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_l^{(-)} + \mathbf{V}(h) \quad (3.26)$$

$$\mathbf{S}_{l,22} = \tilde{\mathbf{B}}_l^{(-)} \tilde{\mathbf{A}}_l^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_l^{(+)} \quad (3.27)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_l^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{l,1}^{(\pm)} & \cdots & \mathbf{B}_{l,M_l}^{(\pm)} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_l^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{l,1}^{(\pm)} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{l,M_l}^{(\pm)} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

である。

### 3.3 各層の Floquet モード解析

平面波振幅に関する列行列  $\boldsymbol{\psi}^{(\pm)}(lh)$  と  $\boldsymbol{\psi}^{(\pm)}((l-1)h)$  の間の関係は、伝達行列  $\mathbf{F}_l$  を用いて、

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}^{(+)}(lh) \\ \boldsymbol{\psi}^{(-)}(lh) \end{pmatrix} = \mathbf{F}_l \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}^{(+)}((l-1)h) \\ \boldsymbol{\psi}^{(-)}((l-1)h) \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

の様に表すことができる。得られる伝達行列  $\mathbf{F}_l$  の表現は、式 (3.23) より、

$$\mathbf{F}_l = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{l,12} - \mathbf{S}_{l,11} \mathbf{S}_{l,21}^{-1} \mathbf{S}_{l,22} & \mathbf{S}_{l,11} \mathbf{S}_{l,21}^{-1} \\ -\mathbf{S}_{l,21}^{-1} \mathbf{S}_{l,22} & \mathbf{S}_{l,21}^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

で与えられる。

ここで、提案手法を計算機で数値解析するために平面波、円筒波展開のそれぞれ

れに打ち切りを導入する。打ち切り次数を平面波展開では  $N$ 、円筒波展開では  $K$  とし、それぞれ  $-N$  次から  $N$  次までの  $2N + 1$  項、 $-K$  次から  $K$  次までの  $2K + 1$  項で近似を行う。

各層の Floquet モードは式 (3.31) で与えられる伝達行列  $\mathbf{F}_l$  の固有値解析より求められる。ここで  $\beta_{l,n}$ 、 $\mathbf{r}_{l,n}$  をそれぞれ  $\mathbf{F}_l$  の  $n$  番目の固有値及びそれに属する固有ベクトルとし、

$$\mathbf{b}_l(y) = \mathbf{R}_l^{-1} \begin{pmatrix} \psi^{(+)}(y) \\ \psi^{(-)}(y) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{R}_l = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{l,1} \cdots \mathbf{r}_{l,4N+2} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

という列行列  $\mathbf{b}_l(y)$  を定義すると、式 (3.30)、(3.32) により、

$$b_{l,n}(lh) = \beta_{l,n} b_{l,n}((l-1)h) \quad (3.34)$$

の関係式が得られる。ここで、 $b_{l,n}(y)$  は  $\mathbf{b}_l(y)$  の  $n$  番目の要素である。 $\{b_{l,n}(lh)\}_{n=1}^{4N+2}$  は  $y = lh$  における Floquet モードの振幅を与えており、伝搬定数  $\eta_{l,m}$  ( $m = 1, \dots, 2N + 1$ ) は、

$$\eta_{l,m} = -i \frac{\text{Ln}(\beta_{l,m})}{h} \quad (3.35)$$

によって計算できる。ただし、 $\text{Ln}$  は自然対数の主値である。

Floquet モードの伝搬方向を、以下の条件で分類する。

- $|\beta_{l,n}| < 1$  であれば、 $+y$  方向に伝搬していく減衰モードである。
- $|\beta_{l,n}| > 1$  であれば、 $-y$  方向に伝搬していく減衰モードである。
- $|\beta_{l,n}| = 1$  であれば、導波モードである。伝搬方向は、そのモードが  $y$  方向に運ぶ電力の符号により判断でき、正ならば  $+y$  方向、負ならば  $-y$  方向で

ある。

上記の条件により決定された各モードの伝搬方向に応じて、固有値及び固有ベクトルを並べ替える。 $\{\beta_{l,n}\}_{n=1}^{4N+2}$  について、 $+y$  方向に伝搬するものは  $\{\beta_{l,n}\}_{n=1}^{2N+1}$ 、 $-y$  方向に伝搬するものは  $\{\beta_{l,n}\}_{n=2N+2}^{4N+2}$  とし、同様に固有ベクトル  $\mathbf{r}_{l,n}$  についても並べ替えを行う。また、この並べ替えを  $\{b_{l,n}(y)\}_{n=1}^{4N+2}$  についても行うが、 $\{b_{l,n}(y)\}_{n=1}^{2N+1}$  を  $\{b_{l,m}^{(+)}(y)\}_{m=1}^{2N+1}$ 、 $\{b_{l,n}(y)\}_{n=2N+2}^{4N+2}$  を  $\{b_{l,m}^{(-)}(y)\}_{m=1}^{2N+1}$  と表すことにし、これらをそれぞれ  $\mathbf{b}_l^{(+)}(y)$ 、 $\mathbf{b}_l^{(-)}(y)$  の要素とする。また、

$$\mathbf{r}_{l,n} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{l,n}^{(+)} \\ \mathbf{r}_{l,n}^{(-)} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

とおくことにすると、 $+y$  方向に伝搬する  $n$  番目の Floquet モードによる電磁界の Fourier 係数は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{z,n}(y) \\ \mathbf{H}_{x,n}(y) \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{(e)} \mathbf{r}_{l,n}^{(+)} \quad (3.37)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{z,n}(y) \\ \mathbf{E}_{x,n}(y) \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{(h)} \mathbf{r}_{l,n}^{(+)} \quad (3.38)$$

で表すことができる。ただし、 $n = 1, \dots, 2N + 1$  とし

$$\mathbf{Q}^{(e)} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \frac{1}{\omega\mu_s} \mathbf{Z} & -\frac{1}{\omega\mu_s} \mathbf{Z} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{Q}^{(h)} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\frac{1}{\omega\varepsilon_s} \mathbf{Z} & \frac{1}{\omega\varepsilon_s} \mathbf{Z} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$$(\mathbf{Z})_{n,m} = \delta_{n,m} \beta_{l,n} \quad (3.41)$$

である。同様に、 $-y$  方向に伝搬する  $n$  番目の Floquet モードによる電磁界の Fourier

係数は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{z,n}(y) \\ -\mathbf{H}_{x,n}(y) \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{(e)} \mathbf{r}_{l,n}^{(-)} \quad (3.42)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{z,n}(y) \\ -\mathbf{E}_{x,n}(y) \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{(h)} \mathbf{r}_{l,n}^{(-)} \quad (3.43)$$

で表すことができる。したがって、 $n$  番目のモードが  $y$  方向に運ぶ電力は、TM 波の場合  $w\Re(\mathbf{E}_{z,n} \cdot \mathbf{H}_{x,n}^*)/2$ 、TE 波の場合  $-w\Re(\mathbf{E}_{x,n} \cdot \mathbf{H}_{z,n}^*)/2$  で与えられる。ただし、上付きのアスタリスクは複素共役を表している。

### 3.4 構造全体の散乱行列

ここでは、周期的円柱配列の多層構造全体による散乱行列を導出する。領域  $0 < y < lh$  の構造に対する散乱行列を、次のように定義する。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_0^{(-)}(0) \\ \mathbf{b}_{l+1}^{(+)}(lh) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11}^{(l)} & \mathbf{S}_{12}^{(l)} \\ \mathbf{S}_{21}^{(l)} & \mathbf{S}_{22}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0^{(+)}(0) \\ \mathbf{b}_{l+1}^{(-)}(lh) \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

ただし、 $\mathbf{S}_{pq}^{(l)}(p, q = 1, 2)$  はそれぞれ  $(2N + 1) \times (2N + 1)$  の正方行列である。

$y = lh$  ( $l = 0, \dots, L$ ) の境界条件は、その両側における接線方向成分の Fourier 係数が一致することにより満たされ、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_{l+1}^{(+)}(lh) \\ \mathbf{b}_{l+1}^{(-)}(lh) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{l,11} & \mathbf{G}_{l,12} \\ \mathbf{G}_{l,21} & \mathbf{G}_{l,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_l^{(+)}(lh) \\ \mathbf{b}_l^{(-)}(lh) \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

が得られる。ただし、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_{l,11} & \mathbf{G}_{l,12} \\ \mathbf{G}_{l,21} & \mathbf{G}_{l,22} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{l+1}^{-1} \mathbf{R}_l \quad (3.46)$$

である。また、式 (3.35) より以下の関係式が得られる。

$$\mathbf{b}_l^{(+)}(lh) = \mathbf{D}_l \mathbf{b}_l^{+}((l-1)h) \quad (3.47)$$

$$\mathbf{b}_l^{(-)}((l-1)h) = \mathbf{D}_l \mathbf{b}_l^{(-)}(lh) \quad (3.48)$$

$$(\mathbf{D}_l)_{n,m} = \delta_{n,m} e^{i\eta_{l,m}h} \quad (3.49)$$

$l = 0$  として式 (3.45) を考え、 $\mathbf{b}_0^{(-)}(0)$  及び  $\mathbf{b}_l^{+}(0)$  について解くと、 $y = 0$  面の散乱行列が、

$$\mathbf{S}_{12}^{(0)} = \mathbf{G}_{0,22}^{-1} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{S}_{11}^{(0)} = -\mathbf{S}_{12}^{(0)} \mathbf{G}_{0,21} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{S}_{21}^{(0)} = \mathbf{G}_{0,11} + \mathbf{G}_{0,12} \mathbf{S}_{11}^{(0)} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{S}_{22}^{(0)} = \mathbf{G}_{0,12} \mathbf{S}_{12}^{(0)} \quad (3.53)$$

で与えられることが分かる。また、 $0 < y < (l-1)h$  の構造に対する散乱行列  $\mathbf{S}_{pq}^{(l-1)}(p, q = 1, 2)$  が分かっているとき、式 (3.45) より、 $0 < y < lh$  の構造に対する散乱行列は、

$$\mathbf{S}_{12}^{(l)} = \mathbf{S}_{12}^{(l-1)} \mathbf{D}_l \mathbf{W}_1^{(l)-1} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{S}_{11}^{(l)} = \mathbf{S}_{11}^{(l-1)} - \mathbf{S}_{12}^{(l)} \mathbf{G}_{l,21} \mathbf{D}_l \mathbf{S}_{21}^{(l-1)} \quad (3.55)$$

$$\mathbf{S}_{22}^{(l)} = \mathbf{W}_2^{(l)} \mathbf{W}_1^{(l)-1} \quad (3.56)$$

$$\mathbf{S}_{21}^{(l)} = \left( \mathbf{G}_{l,11} - \mathbf{S}_{22}^{(l)} \mathbf{G}_{l,21} \right) \mathbf{D}_l \mathbf{S}_{21}^{(l-1)} \quad (3.57)$$

$$W_1^{(l)} = G_{l,22} + G_{l,21} D_l S_{22}^{(l-1)} D_l \quad (3.58)$$

$$W_2^{(l)} = G_{l,12} + G_{l,11} D_l S_{22}^{(l-1)} D_l \quad (3.59)$$

で求めることができる。この関係により、散乱行列を  $l$  について順に計算していくことで、 $0 < y < Lh$  の領域全体の散乱行列  $S_{pq}^{(L)}(p, q = 1, 2)$  を求めることができる。

## 3.5 数値例

この節では、本章で提案した手法の有効性を確認するために、いくつかの構造に対する数値計算結果を示す。計算結果は全て TM 波入射によるものである。

まず、結合フォトニック結晶導波路について伝搬する Floquet モードを計算し、文献に掲載されている数値と比較し議論する。次に、いくつかのフォトニック結晶導波路デバイス構造について計算を行い、計算結果の妥当性を議論する。

### 3.5.1 直線導波路の Floquet モード

この節では、提案手法の有効性を確認するために、まず、図 3.3 のようなフォトニック導波路構造における伝搬定数を、文献 [5] に示されている計算値と比較する。入射波の波長を  $\lambda_0 = 1550 \text{ nm}$  とし、背景媒質と円柱の誘電率をそれぞれ  $\varepsilon_s = \varepsilon_0$ 、 $\varepsilon_c = 11.56 \varepsilon_0$ 、透磁率をそれぞれ  $\mu_s = \mu_c = \mu_0$  とする。また、格子定数を  $d = h = 0.34 \lambda_0$ 、円柱の半径  $a = 0.2 d$  とし、周期境界条件を  $w = 20 d$  とする。この条件において伝搬する Floquet モードは、偶モード、奇モードがそれぞれ 1 つずつあり、それぞれの伝搬定数は、 $2.343387 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$ 、 $2.056928 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$  である [5]。これらの値を参照値として、誤差率を

$$(\text{誤差率}) = \frac{|(\text{計算値}) - (\text{参照値})|}{(\text{参照値})} \quad (3.60)$$

のように定義し、打ち切り回数によって伝搬定数の誤差率がどのように変化するかを、図 3.4 に示す。ここで、平面波展開に対しての収束を調べるときは円筒波展開次数は  $K = 40$  とし、円筒波展開に対して調べるときには平面波展開次数  $N = 40$  とした。平面波、円筒波展開の次数は、それぞれ  $N > 30$ 、 $K > 40$  程度以上であれば参照値と同等の精度で伝搬定数を求めることができることが分かる。また、図 3.5 に導波モードの  $y = lh$  におけるモード分布関数を示す。

### 3.5.2 共振器構造を持つ導波路デバイス構造の伝搬特性

この節では、いくつかの基本的なフォトニック結晶導波路デバイス構造に対する数値計算結果を示す。ここでは入力用導波路として、 $y < 0$  の領域において 1 本の単一モード直線導波路を  $y$  軸と平行に設けることにし、入射波はこの導波路を  $+y$  方向に伝搬する基本導波モードとする。基本導波モードに対応する固有値、固有ベクトル、Floquet モード振幅がそれぞれ一番目になるように並べ替えをしてお

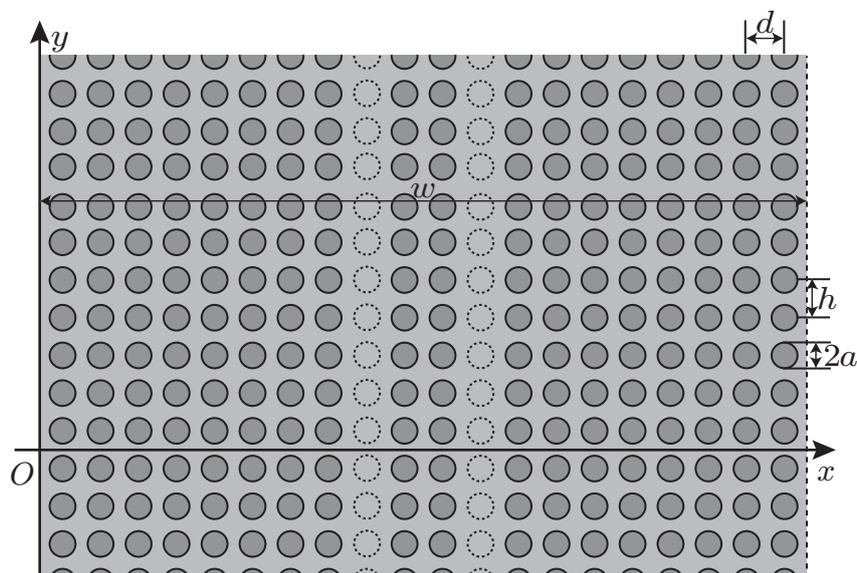
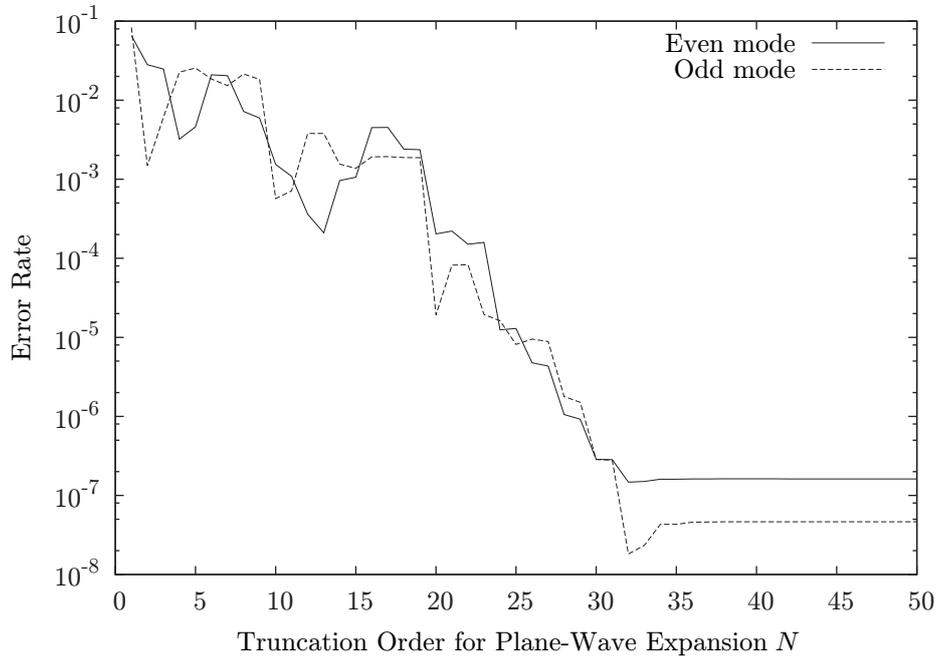
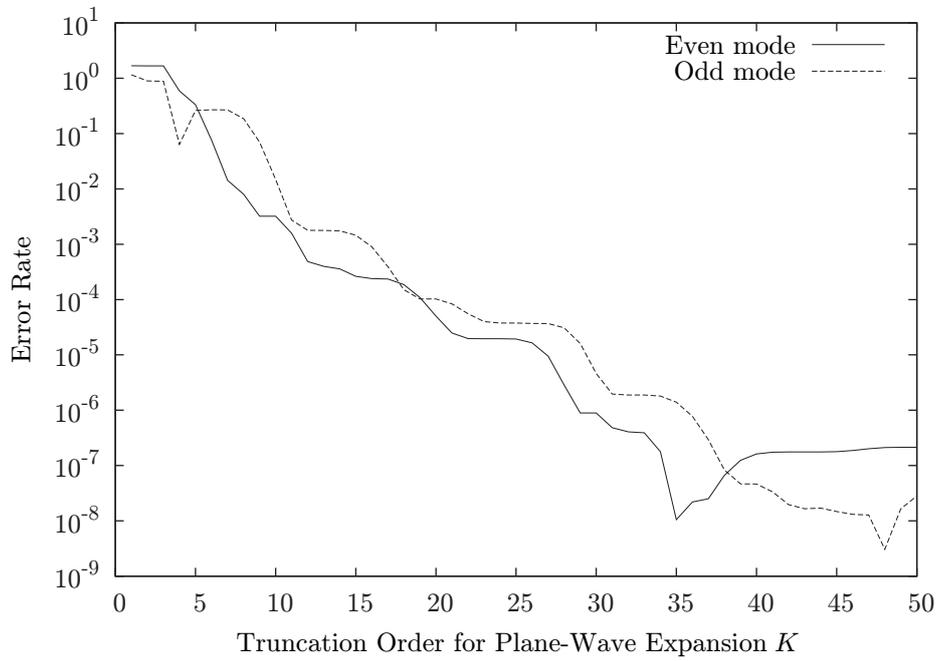


図 3.3: 結合フォトニック結晶導波路の構造



(a) 平面波展開に対する収束



(b) 円筒波展開に対する収束

図 3.4: 打ち切り次数に対する Floquet モード伝搬定数の誤差率

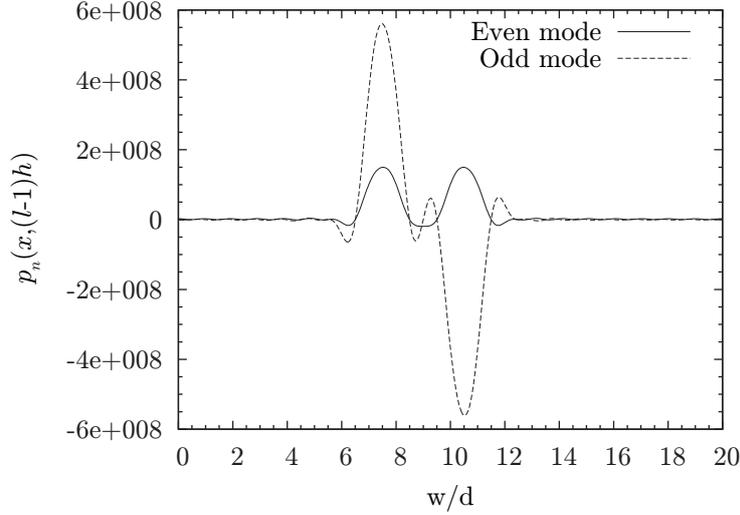


図 3.5: 導波モードのモード分布関数

くと、入射条件は以下の様になる。

$$b_{0,m}^{(+)}(0) = \delta_{m,1} \quad (3.61)$$

$$b_{L+1,m}^{(-)}(Lh) = 0 \quad (3.62)$$

ただし、 $m = 1, \dots, 2N + 1$  である。入出力用の導波路がそれぞれ 1 本の場合、散乱行列  $\mathbf{S}_{11}^{(L)}$ 、 $\mathbf{S}_{21}^{(L)}$  から出力に関わる Floquet モード振幅を計算し、 $y < 0$  の領域における  $-y$  方向に  $m$  番目のモードにより運ばれる電力を  $s_{0,m}$ 、 $y > Lh$  の領域における  $+y$  方向に  $m$  番目のモードにより運ばれる電力を  $s_{L,m}$  とすると、透過電力が  $(s_{L,1}/s_{0,1})|b_{L,1}^{(+)}(Lh)|^2$ 、反射電力が  $|b_{0,1}^{(-)}(0)|^2$  で計算できる。ここで  $s_{l,m}$  は、 $-w\Re(\mathbf{E}_{z,m}(lh) \cdot \mathbf{H}_{x,m}(lh)^*)/2$  である。

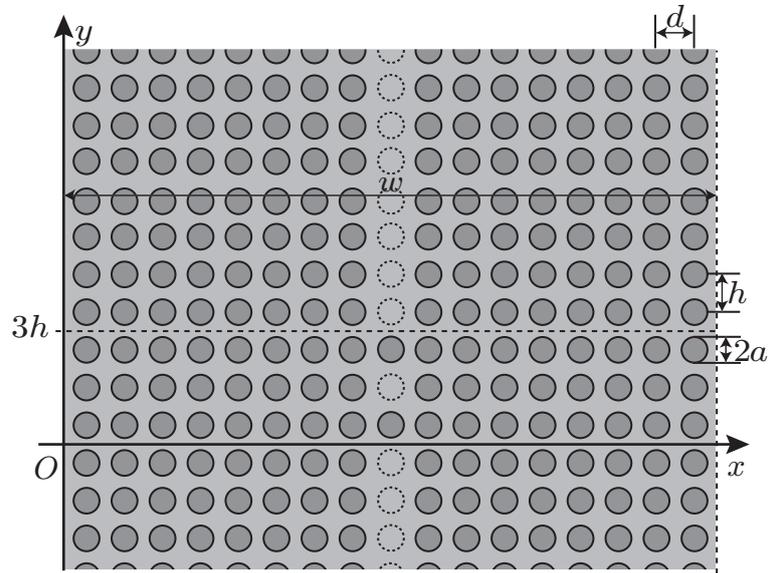
背景媒質と円柱の誘電率をそれぞれ  $\varepsilon_s = \varepsilon_0$ 、 $\varepsilon_c = 12.25\varepsilon_0$ 、透磁率をそれぞれ  $\mu_s = \mu_c = \mu_0$  とする。ここで用いる円柱の材質は、シリコンを仮定している。また、格子定数を  $d = h = 340$  nm、円柱の半径  $a = 0.2d$  とし、周期境界条件を  $w = 17d$  とする。これらの値を用いた単一の直線欠陥による導波路は単一 Floquet モードを有し、電磁界は欠陥近くのみ存在することが分かっている。

図 3.6(a) は、直線導波路に強結合共振器を有するフォトニック結晶導波路フィ

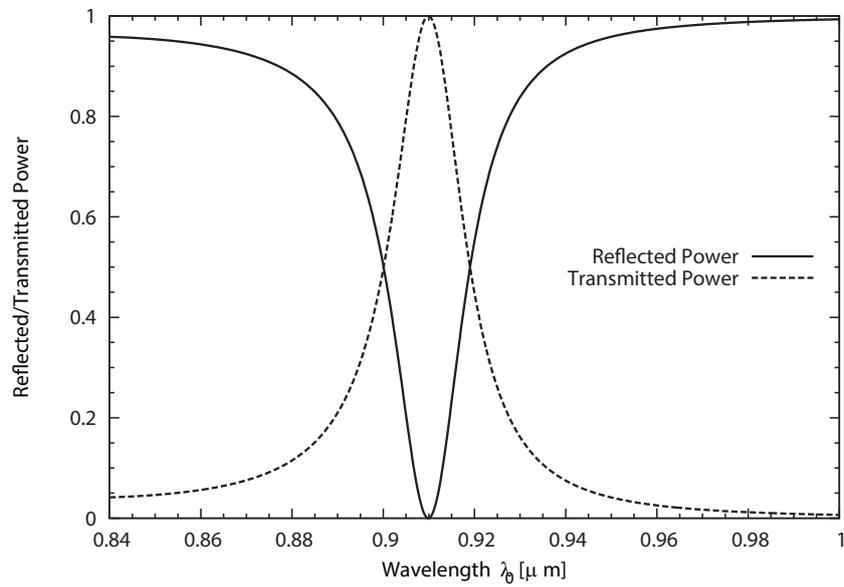
ルタの構造である。入出力部の領域は単一の直線導波路となっており、遷移領域は第2層のみ欠陥を設けている。図3.6(b)は、効率を考え平面波と円筒波の展開次数をそれぞれ  $N = 30$ 、 $K = 25$  としたときの反射透過特性である。図3.6(b)に示す反射透過特性より、波長  $\lambda_0 = 0.91 \mu\text{m}$  付近に共振があることが分かる。また、図3.7(a)は、直線導波路に弱結合共振器を有するフォトニック結晶導波路フィルタ構造である。図3.6の構造と比べ、遷移領域内の欠陥の無い層が2層追加されている。そのため結合が弱くなり透過帯域が狭くなっていることが予測できる。提案手法による図3.7(a)の構造による反射透過特性を図3.7(b)に示す。得られた結果により、予測した通り透過帯域が狭められていることが確かめられる。また、閉じ込め効果が強くなるため共振波長がわずかに短い方向にシフトしていることが分かる。図3.8(a)は、角に共振構造を持つフォトニック結晶クランク導波路構造であり、提案手法によるその反射透過特性を図3.8(b)に示す。遷移領域は3層から成っており、入出力導波路は互いに正対していない。図3.8(b)に示すように、この構造では3つの共振ピークを持つことが分かる。入出力導波路がそれぞれ1本の構造では、全ての構造において反射特性と透過特性に対称性が認められ、放射がないことが確認できる。また、円柱や角柱の断面積が同じ場合、それらを用いて構成されているフォトニック結晶はほぼ同じ特性を示すことが知られている [6]。これまで示したデバイスによる反射透過特性は、Fourier 級数展開法により、角柱で構成されているフォトニック結晶をモデルとして既に計算されており [25]、文献による計算結果と同じ特性を得ることが確認できた。

### 3.5.3 分岐導波路デバイス構造の伝搬特性

次に、文献 [26] で計算されている構造について解析を行う。背景媒質と円柱の誘電率をそれぞれ  $\varepsilon_s = \varepsilon_0$ 、 $\varepsilon_c = 11.56 \varepsilon_0$ 、透磁率をそれぞれ  $\mu_s = \mu_c = \mu_0$  とする。また、格子定数を  $d = h$ 、円柱の半径  $a = 0.2d$  とし、周期境界条件を  $w = 19d$  とする。

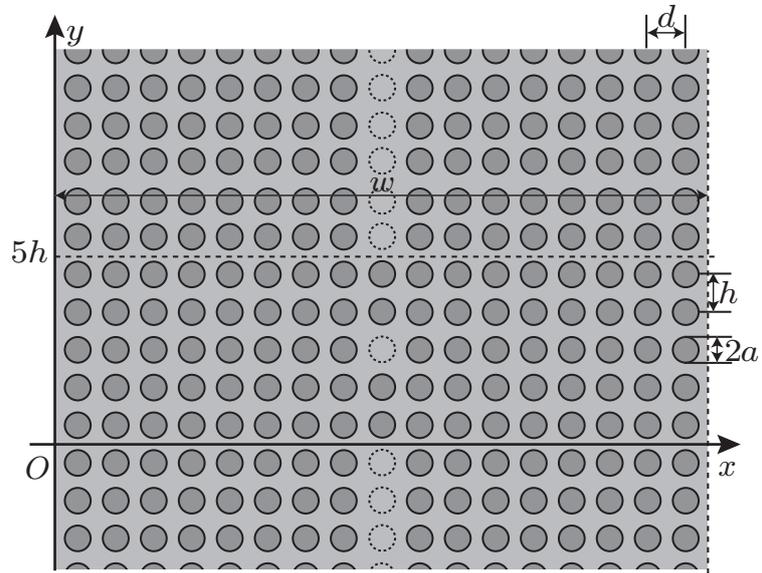


(a)

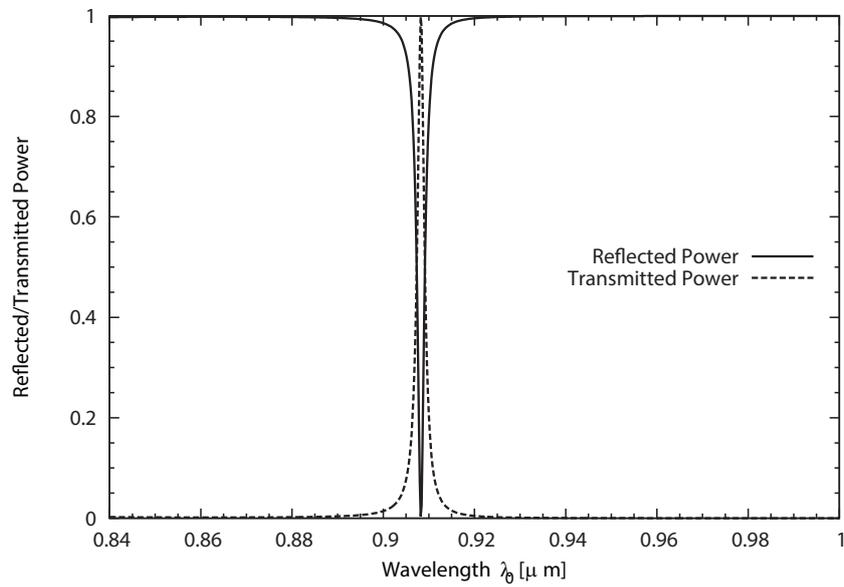


(b)

図 3.6: 共振器を有する導波路 (強結合の場合) の構造 (a) とその反射及び透過特性 (b)

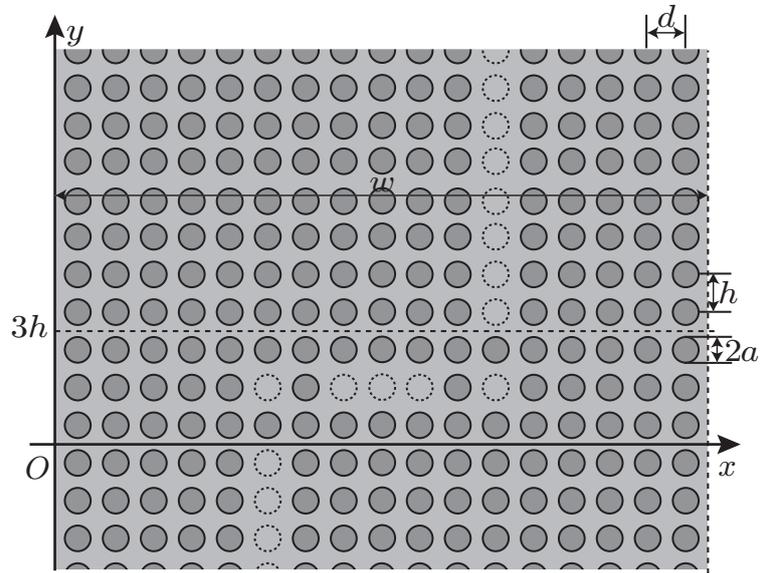


(a)

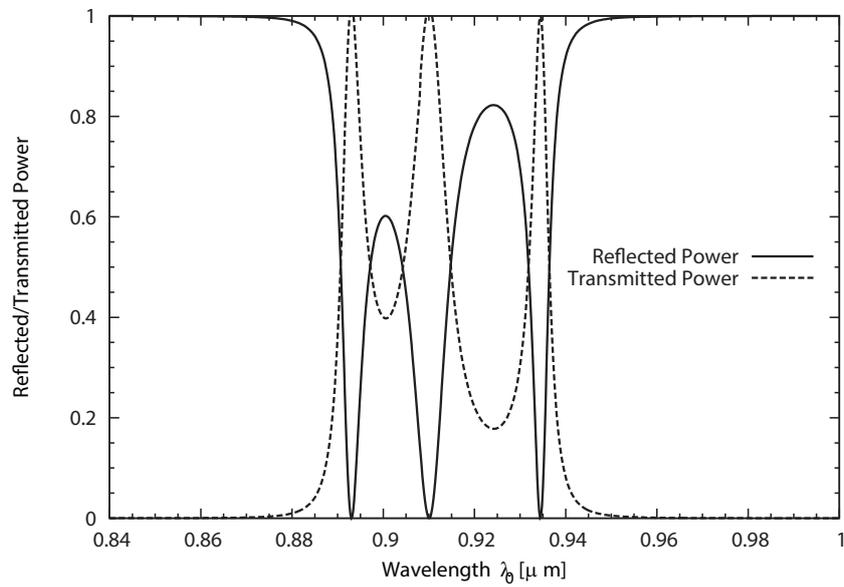


(b)

図 3.7: 共振器を有する導波路 (弱結合の場合) の構造 (a) とその反射及び透過特性 (b)



(a)



(b)

図 3.8: 曲がり部に共振構造を有するクラック導波路の構造 (a) とその反射及び透過特性 (b)

入力用の導波路が1本、出力用導波路が2本である場合、導波路 $\nu$  ( $\nu = 1, 2$ ) に対する透過電力は  $(s_{\nu,L,m}/s_{0,m})|b_{L+1,\nu,1}^{(+)}(Lh)|^2$  で計算できる。但し、 $s_{\nu,L,m}$  は出力用導波路 $\nu$  のみが存在した場合の構造を考えたときの、 $y > Lh$  の領域による  $+y$  方向に運ばれる電力である。また、 $b_{L+1,\nu,1}^{(+)}(Lh)$  は

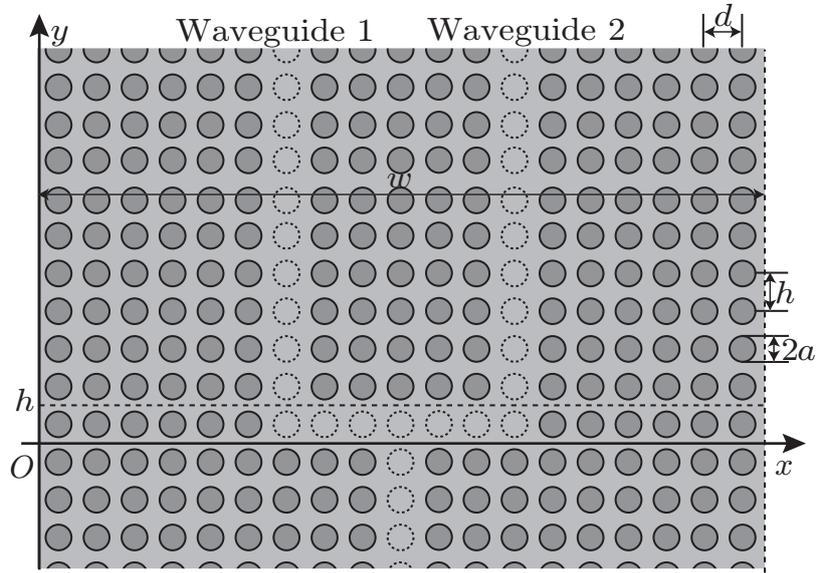
$$b_{L+1,\nu,1}^{(+)}(Lh) = \sum_{m'=1}^{2N+1} b_{L+1,m'}^{(+)}(Lh) \frac{\langle \mathbf{E}_{z,m'}(Lh) | \mathbf{H}_{x,1,\nu} \rangle + \langle \mathbf{E}_{z,1,\nu} | \mathbf{H}_{z,m'}(Lh) \rangle}{2\langle \mathbf{E}_{z,1,\nu} | \mathbf{H}_{x,1,\nu} \rangle} \quad (3.63)$$

で与えられ、山括弧の演算は  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  をそれぞれ  $2N+1$  の要素を持つ列行列とすると

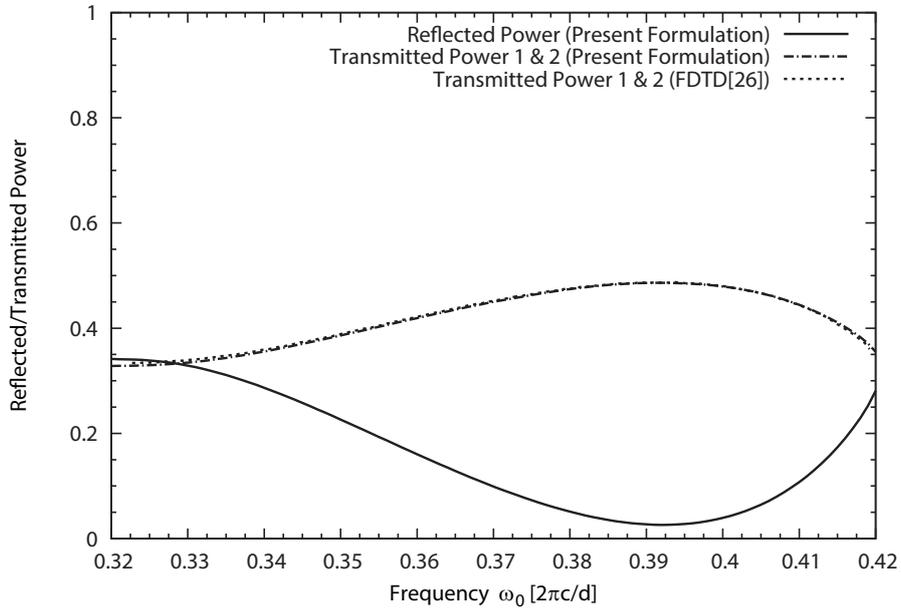
$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \sum_{n=1}^{2N+1} (\mathbf{a})_n (\mathbf{b})_{-n+2N+2} \quad (3.64)$$

のように表す。

図 3.9(a) に示すフォトニック結晶対称分岐デバイスを考える。提案手法による、この構造の規格化周波数  $\omega_0 = 2\pi c/d$  に対する反射透過特性の計算結果を、図 3.9(b) に示す。構造が対称なため、導波路1と導波路2に対する透過電力は同じとなっていることが確認できる。また、図 3.9(a) の構造に、半径  $a_1 = 0.07d$ 、 $a_2 = 0.055d$  で、その他のパラメータが同じ円柱をそれぞれ2本挿入した図 3.10(a) の構造について考える。この構造の反射透過特性は、図 3.10(b) のように得られた。追加した円柱により共振していると思われる帯域が確認でき、それぞれの導波路で透過電力は等しいことが確認できる。ここで示した図 3.9(a)、および 3.10(a) の構造による伝搬特性は、文献 [26] において FDTD 法により計算されており、その計算結果は図 3.9(b) および 3.10(b) において破線で示している通りである。提案手法の結果は、FDTD 法による結果と同じ特性を得られることが確認できる。

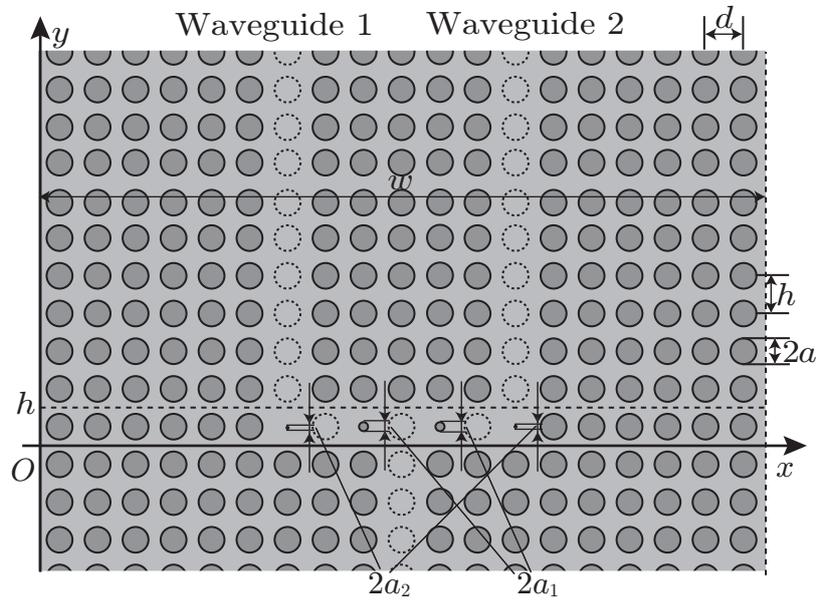


(a)

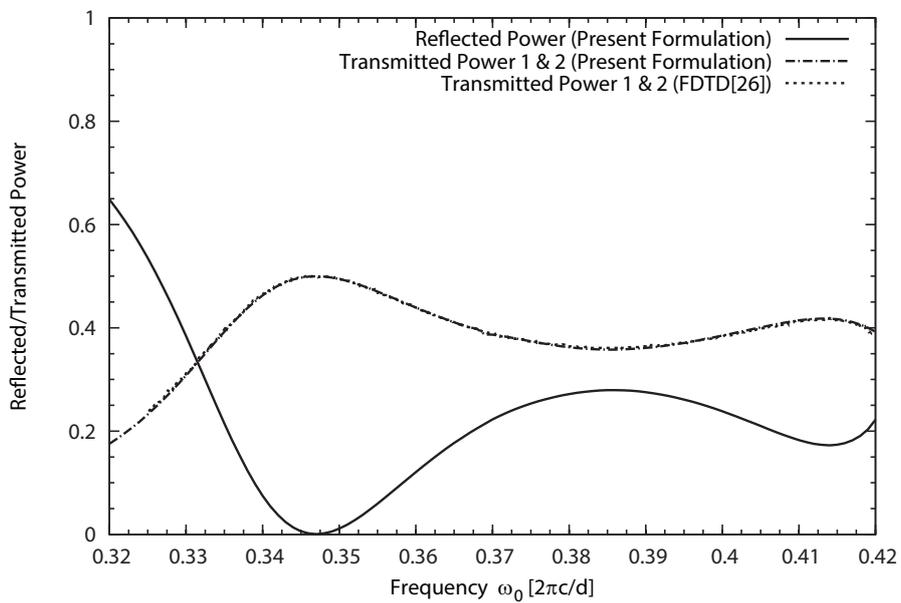


(b)

図 3.9: 対称分岐導波路の構造 (a) とその反射及び透過特性 (b)



(a)



(b)

図 3.10: 共振構造を有する対称分岐導波路の構造 (a) とその反射及び透過特性 (b)

## 3.6 まとめ

本章では、円柱により構成された2次元フォトニック結晶導波路デバイスを、周期境界条件を用いた散乱行列を導出する定式化により計算する手法を提案し、いくつかの構造に対する反射及び透過特性を示すことにより、提案手法の妥当性を示した。フォトニック結晶導波路デバイス構造に対して周期境界条件を導入し、適当な欠陥が存在する部分については円柱配列が導波路の方向に重なる多層構造と考え積層構造の散乱行列を順次計算していくことにより、多層構造全体の散乱行列を求めている。各層内の伝搬特性を解析するために、複数円柱による散乱問題を解く手法であるRTMAを援用している。さらに構造全体の伝達行列を導出し、固有値問題を解くことにより、構造を伝搬するFloquetモードが計算している。

提案手法により、いくつかの構造についてその特性を求め、妥当性を示した。他の手法で高精度に計算されたフォトニック結晶導波路の伝搬定数について、提案手法においても同程度の精度が得られることを確認した。フォトニック結晶導波路デバイス構造においても、提案手法によって得られた特性は、他の手法により得られた特性と同等であることが確認でき、計算の妥当性を示した。また、FDTD法と提案手法の解析結果を比較した結果、FDTD法と同じ特性の結果を得ていることから、計算の妥当性を示すことができている。

# 第4章 周期境界条件を陽に用いない 解析法

この章では、円柱により構成された2次元フォトニック結晶導波路デバイス構造の入出力特性解析について、スペクトル領域法を使用した解析手法を提案する。前章と異なり、考察対象のフォトニック結晶は $y$ 方向だけでなく $x$ 方向にも無限に広がっており、すべて同一のパラメータを持つ円柱から構成されているものとする。また、適当な位置の円柱を取り除くことにより、フォトニック結晶導波路デバイス構造を構成している。提案手法では、波数空間において離散化を行うために擬周期 Fourier 変換を使用しており、周期境界条件を使用せずに導波路の Floquet モードの導出を行うことができる [20]。周期境界条件を用いる場合、波数空間において標本点を等間隔にとることになる。この章で提案する手法では、標本点を適当な間隔でとることができるため、周期境界条件を用いるよりも計算コストが下げられることが期待できる。ただし、多層構造の扱いや RTMA などの計算手法は前章と同様に用いることにする。

## 4.1 解析対象とする問題の設定

図 4.1 に示されている様な Floquet モードが伝搬するフォトニック結晶導波路デバイス構造について考える。円柱の半径は  $a$  とし、前章と同様に、誘電率を  $\epsilon_c$ 、透磁率を  $\mu_c$  とし、背景媒質では、誘電率  $\epsilon_s$ 、透磁率  $\mu_s$  とする。導波路の方向に  $y$  軸を取り、円柱の軸方向は  $z$  軸と並行で、 $(x, y) = (nd, qh - h/2)$  (ただし、 $n, q$  は任

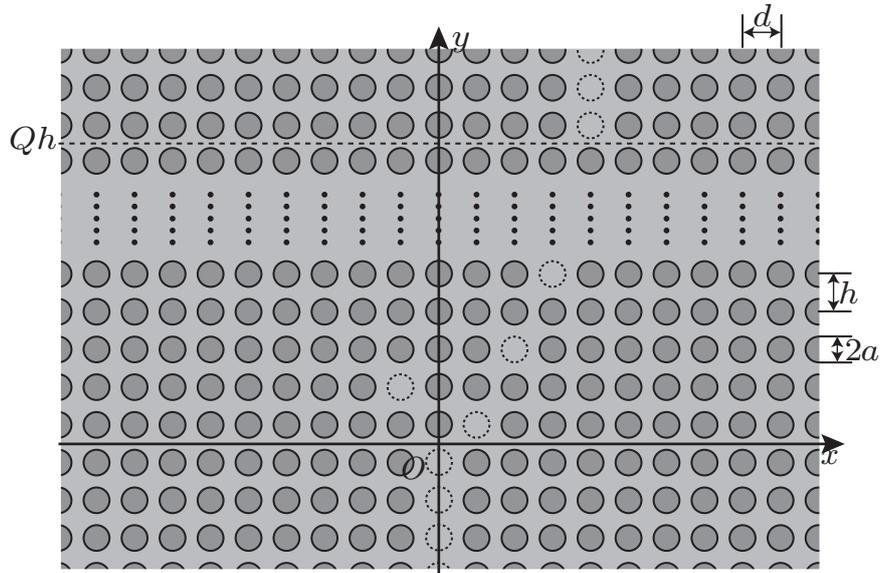


図 4.1: 考察対象

意の整数) に円柱の中心がある。ただし、フォトニック結晶導波路を構成するために、適当な位置の円柱は取り除かれている。 $y = qh - h/2$  に並んでいる円柱の中で、どの円柱が取り除かれるのかを表現するために、整数の集合  $\mathbb{Z}$  の部分集合  $\mathcal{D}^{(q)}$  を導入する。整数  $n$  が部分集合  $\mathcal{D}^{(q)}$  の要素である場合、 $(x, y) = (nd, qh - h/2)$  に中心がある円柱は取り除かれている。また、 $\mathcal{D}^{(q)}$  の補集合を  $\mathcal{D}^{(q)c}$  と表すことにする。

構造は、前章と同じように、大きく分けて3つの部分から成っている。 $y < 0$  と  $y > Qh$  は、入出力に用いる導波路であり、 $y$  方向に直線状の欠陥を持つ。 $0 \leq y \leq Qh$  では、適当な部分に欠陥が存在する周期的円柱配列が  $y$  方向に  $Q$  層積み重なっている。本章では波数空間での離散化を行うために擬周期 Fourier 変換を用いる [27]。適当な関数  $f(x)$  に対する擬周期 Fourier 変換及び、その逆変換はそれ

ぞれ

$$\bar{f}(x; \xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x - md)e^{imd\xi} \quad (4.1)$$

$$f(x) = \frac{1}{k_d} \int_{-k_d/2}^{k_d/2} \bar{f}(x; \xi) d\xi \quad (4.2)$$

で定義される。ただし、 $k_d = 2\pi/d$  であり、 $\xi$  は波数に対応する変換パラメータである。変換された関数  $\bar{f}(x; \xi)$  は、 $x$  に関して  $\bar{f}(x - d; \xi) = \bar{f}(x; \xi)e^{-id\xi}$  という擬周期  $d$  の擬周期性を持つので、電磁界に対して擬周期 Fourier 変換を適用すると、完全周期構造にのみ有用だった Floquet の定理に基づく解析方法を用いることができるようになる。一方、変換パラメータ  $\xi$  に関して、変換された関数  $\bar{f}(x; \xi)$  は周期  $k_d$  の周期関数となる。

## 4.2 各層の円柱配列による散乱

考察対象の構造は、多層に積み重なっている周期構造に欠陥が存在する構造である。RTMA を用いて  $y = qh - h/2$  上に並べられた円柱配列のみが存在する構造による場合の散乱を考える。 $y = qh$  と  $y = (q - 1)h$  に境界を持つ第  $q$  層に対する入射界は、 $y = qh$  面から  $-y$  方向に伝搬していく波と  $y = (q - 1)h$  面から  $+y$  方向に伝搬していく波である。したがって、入射界は擬周期 Fourier 変換を用いると

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^{(i)}(x; \xi, y) = & \mathbf{f}^{(-)}(x, y - qh; \xi) \bar{\psi}^{(-)}(\xi, qh) \\ & + \mathbf{f}^{(+)}(x, y - (q - 1)h; \xi) \bar{\psi}^{(+)}(\xi, (q - 1)h) \end{aligned} \quad (4.3)$$

の様に平面波展開で表現することができる [27]。ただし、上付き括弧内の符号は平面波の伝搬方向で、 $+y$  方向または  $-y$  方向であることを表しており、 $\mathbf{f}^{(\pm)}(x, y; \xi)$

は、 $n$  番目の要素が

$$(\mathbf{f}^{(\pm)}(x, y; \xi))_n = e^{i(\alpha_n(\xi)x \pm \beta_n(\xi)y)} \quad (4.4)$$

で与えられる平面波展開基底を表す列行列である。ただし、

$$\alpha_n(\xi) = \xi + nk_d \quad (4.5)$$

$$\beta_n(\xi) = \sqrt{k_s^2 - \alpha_n(\xi)^2} \quad (4.6)$$

である。

式 (4.3) は、文献 [27] に示されている展開基底の変換関係式を用いると

$$\bar{\psi}^{(i)}(x; \xi, y) = \mathbf{g}^{(J)}(x, y - (qh - h/2))^t \bar{\mathbf{a}}^{(i)}(\xi) \quad (4.7)$$

のように表すことができる。ただし、係数行列  $\bar{\mathbf{a}}^{(i)}(\xi)$  は、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}^{(i)}(\xi) = & \mathbf{A}^{(-)}(\xi)^t \mathbf{V}(h/2; \xi)^t \bar{\psi}^{(-)}(\xi, h/2) \\ & + \mathbf{A}^{(+)}(\xi)^t \mathbf{V}(h/2; \xi)^t \bar{\psi}^{(+)}(\xi, (q-1)h) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$(\mathbf{A}^{(\pm)}(\xi))_{n,m} = \left( \frac{i\alpha_n(\xi) \pm \beta_n(\xi)}{k_s} \right)^m \quad (4.9)$$

$$(\mathbf{V}(y; \xi))_{n,m} = \delta_{n,m} e^{i\beta_n(\xi)y} \quad (4.10)$$

で表わされる。式 (4.2) を適用すると、元の入射界  $\psi^{(i)}(x, y)$  は

$$\psi^{(i)}(x, y) = \mathbf{g}^{(J)}(x - nd, y - (qh - h/2))^t \mathbf{a}_n^{(i)} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{a}_n^{(i)} = \frac{1}{k_d} \int_{-k_d/2}^{k_d/2} \bar{\mathbf{a}}^{(i)}(\xi) e^{ind\xi} d\xi \quad (4.12)$$

の様な円筒波展開表現で表されることが分かる。このとき、列行列  $\bar{\mathbf{a}}^{(i)}(\xi)$  は  $\mathbf{a}_m^{(i)}$

を用いて

$$\bar{\mathbf{a}}^{(i)}(\xi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathbf{a}_m^{(i)} e^{-imd\xi} \quad (4.13)$$

のように表すことができる。

一方、散乱界  $\psi^{(s)}(x, y)$  は円柱から外向きに伝搬する波からなり、円柱の外側の散乱界は

$$\psi^{(s)}(x; \xi, y) = \sum_{n \in \mathcal{D}^{(q)c}} \mathbf{g}^{(H^{(1)})}(x - nd, y - (qh - h/2))^t \bar{\mathbf{a}}^{(s)}(\xi) e^{ind\xi} \quad (4.14)$$

の様に表すことができる。散乱界に擬周期 Fourier 変換を適用すると、変換された散乱界は

$$\bar{\psi}^{(s)}(x; \xi, y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^{(H^{(1)})}(x - ld, y - (qh - h/2))^t \bar{\mathbf{a}}^{(s)}(\xi) e^{ild\xi} \quad (4.15)$$

$$\bar{\mathbf{a}}^{(s)}(\xi) = \sum_{m \in \mathcal{D}^{(q)c}} \mathbf{a}_m^{(s)} e^{-imd\xi} \quad (4.16)$$

の様に表すことができる。また、列行列  $\bar{\mathbf{a}}^{(s)}(\xi)$  と  $\mathbf{a}_l^{(s)}$  の間には

$$\mathbf{a}_l^{(s)} = \frac{1}{k_d} \int_{-k_d/2}^{k_d/2} \bar{\mathbf{a}}^{(s)}(\xi) e^{ild\xi} d\xi \quad (4.17)$$

の関係がある。

$y = qh$  と  $y = (q-1)h$  付近の全体界は、文献 [27] の変換関係式により平面波展開で表すことができ、外向きに伝搬する平面波振幅は

$$\bar{\psi}^{(+)}(\xi, qh) = \mathbf{V}(h; \xi) \psi^{(+)}(\xi, (q-1)h) + \mathbf{V}(h/2; \xi) \mathbf{B}^{(+)}(\xi) \bar{\mathbf{a}}^{(s)}(\xi) \quad (4.18)$$

$$\bar{\psi}^{(-)}(\xi, (q-1)h) = \mathbf{V}(h; \xi) \psi^{(-)}(\xi, qh) + \mathbf{V}(h/2; \xi) \mathbf{B}^{(-)}(\xi) \bar{\mathbf{a}}^{(s)}(\xi) \quad (4.19)$$

のよう表現できる。ただし、

$$(\mathbf{B}^{(\pm)}(\xi))_{n,m} = \frac{2}{d\beta_m(\xi)} \left( \frac{-i\alpha_m(\xi) \pm \beta_m(\xi)}{k_s} \right)^n \quad (4.20)$$

である。

入射界と各円柱による散乱界の係数行列の関係は、式 (3.10) と同様に考えると

$$\mathbf{a}_m^{(s)} = \mathbf{T}_c \left( \mathbf{a}_m^{(i)} + \sum_{l \in \mathcal{D}^{(q)c} \setminus \{m\}} \mathbf{G}^{(H^{(1)})}((m-l)d, 0)^t \mathbf{a}_l^{(s)} \right) \quad (4.21)$$

の様に表すことができる。ただし、 $l \in \mathcal{D}^{(q)c} \setminus \{m\}$  は集合  $\mathcal{D}^{(q)c}$  から要素  $m$  を取り除いた集合を表す。

式 (4.21) を式 (4.16) に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(p)}(\xi) \bar{\mathbf{a}}^{(s)}(\xi) + \frac{1}{k_d} \int_{-k_d/2}^{k_d/2} \mathbf{M}^{(d)}(\xi, \xi') \bar{\mathbf{a}}^{(s)}(\xi') d\xi' \\ = \bar{\mathbf{a}}^{(i)}(\xi) + \frac{1}{k_d} \int_{-k_d/2}^{k_d/2} c^{(d)}(\xi, \xi') \bar{\mathbf{a}}^{(i)}(\xi') d\xi' \end{aligned} \quad (4.22)$$

の様な入射界と散乱界の係数行列の関係式を得ることができる。ただし、

$$\mathbf{M}^{(p)}(\xi) = \mathbf{T}_c^{-1} - \mathbf{L}(\xi) \quad (4.23)$$

$$\mathbf{M}^{(d)}(\xi, \xi') = -c^{(d)}(\xi, \xi') \mathbf{L}(\xi') \quad (4.24)$$

$$\mathbf{L}(\xi) = \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \mathbf{G}^{(H^{(1)})}(-ld, 0)^t e^{ild\xi} \quad (4.25)$$

$$c^{(d)}(\xi, \xi') = - \sum_{l \in \mathcal{D}^{(q)}} e^{ild(\xi - \xi')} \quad (4.26)$$

である。

積分方程式 (4.22) を数値的に解くために、変換パラメータ  $\xi$  に関する離散化を導入する。ここで、 $L$  個の標本点を  $\{\xi_l\}_{l=1}^L$  とすると、式 (4.22) はそれぞれの標本

点において積分方程式 (4.22) を満足する。式中の積分もこの標本点における値を用いた適当な数値積分スキームによって近似することにする。数値積分スキームにより決定される重みを  $\{w_l\}_{l=1}^L$  とすると、この方程式は

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(p)}(\xi)\bar{\mathbf{a}}^{(s)}(\xi_l) + \frac{1}{k_d} \sum_{l'=1}^L w_{l'} \mathbf{M}^{(d)}(\xi_l, \xi_{l'}) \bar{\mathbf{a}}^{(s)}(\xi_{l'}) \\ = \bar{\mathbf{a}}^{(i)}(\xi_l) - \frac{1}{k_d} \sum_{l'=1}^L w_{l'} \bar{\mathbf{a}}^{(i)}(\xi_{l'}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

の様に近似される。この式を書き直すと、標本点における展開係数  $\tilde{\mathbf{a}}^{(s)}$  と  $\tilde{\mathbf{a}}^{(i)}$  の関係は

$$\tilde{\mathbf{a}}^{(s)} = \tilde{\mathbf{M}}_q^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{a}}^{(i)} \quad (4.28)$$

のようになる。ただし、

$$\tilde{\mathbf{M}}_q = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{q,1,1} \cdots \mathbf{M}_{q,1,L} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \mathbf{M}_{q,L,1} \cdots \mathbf{M}_{q,L,L} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_q = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{q,1,1} \cdots \mathbf{C}_{q,1,L} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \mathbf{C}_{q,L,1} \cdots \mathbf{C}_{q,L,L} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{M}_{q,l,l'} = \delta_{l,l'} \mathbf{T}_c^{-1} - \mathbf{C}_{q,l,l'} \mathbf{L}(\xi_{l'}) \quad (4.31)$$

$$\mathbf{L}(\xi) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \mathbf{G}^{(H^{(1)})}(-nd, 0)^t e^{ind\xi} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{C}_{q,l,l'} = \left( \delta_{l,l'} - \frac{w_{l'}}{k_d} \sum_{n \in \mathcal{D}(q)} e^{ind(\xi - \xi')} \right) \mathbf{I} \quad (4.33)$$

である。

式 (4.8)、(4.18)、(4.19) より、各標本点における列行列  $\bar{\mathbf{a}}^{(i)}(\xi)$  と  $\bar{\boldsymbol{\psi}}^{(+)}(\xi, qh)$ 、 $\bar{\boldsymbol{\psi}}^{(-)}(\xi, (q-1)h)$  の関係は

$$\tilde{\mathbf{a}}^{(i)} = \tilde{\mathbf{A}}^{(-)}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^{(-)}(qh) + \tilde{\mathbf{A}}^{(+)}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^{(+)}((q-1)h) \quad (4.34)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}^{(+)}(qh) = \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^{(+)}((q-1)h) + \tilde{\mathbf{B}}^{(+)}\tilde{\mathbf{a}}^{(s)} \quad (4.35)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}^{(-)}((q-1)h) = \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^{(-)}(qh) + \tilde{\mathbf{B}}^{(-)}\tilde{\mathbf{a}}^{(s)} \quad (4.36)$$

のような式で与えられる。ただし、 $f = i, s$  において

$$\tilde{\mathbf{a}}^{(f)}(y) = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}^{(f)}(\xi_1 y) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}^{(\pm)}(\xi_L) \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}^{(\pm)}(y) = \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\psi}}^{(\pm)}(\xi_1, y) \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{\psi}}^{(\pm)}(\xi_L, y) \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(\pm)}(\xi_1)^t \mathbf{V}(h/2; \xi_1)^t & \mathbf{0} \\ & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(\pm)}(\xi_L)^t \mathbf{V}(h/2; \xi_L)^t \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}(h/2; \xi_1) \mathbf{B}^{(\pm)}(\xi_1)^t & \mathbf{0} \\ & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}(h/2; \xi_L) \mathbf{B}^{(\pm)}(\xi_L)^t \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}(h; \xi_1) & \mathbf{0} \\ & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}(h; \xi_L) \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

である。

また、式 (4.28)、(4.34)–(4.36) より、 $y = qh$  面と  $y = (q-1)h$  面における入射

界と散乱界の関係は、散乱行列を用いて

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}^{(+)}(qh) \\ \tilde{\psi}^{(-)}((q-1)h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{q,11} & \mathbf{S}_{q,12} \\ \mathbf{S}_{q,21} & \mathbf{S}_{q,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}^{(-)}(qh) \\ \tilde{\psi}^{(+)}((q-1)h) \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

で表すことができる。ただし、

$$\mathbf{S}_{q,11} = \tilde{\mathbf{B}}^{(+)} \tilde{\mathbf{M}}_q^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{A}}^{(-)} \quad (4.43)$$

$$\mathbf{S}_{q,12} = \tilde{\mathbf{B}}^{(+)} \tilde{\mathbf{M}}_q^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{A}}^{(+)} + \tilde{\mathbf{V}} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{S}_{q,21} = \tilde{\mathbf{B}}^{(-)} \tilde{\mathbf{M}}_q^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{A}}^{(-)} + \tilde{\mathbf{V}} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{S}_{q,22} = \tilde{\mathbf{B}}^{(-)} \tilde{\mathbf{M}}_q^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{A}}^{(+)} \quad (4.46)$$

である。

式(4.42)は、前章における式(3.23)にあたり、これ以降の計算は前章と同様に、個々の層について散乱行列を求め、縦続接続していき、最終的に  $0 < y < Qh$  の領域全体の散乱行列  $\mathbf{S}_{pq}^{(Q)}$  ( $p, q = 1, 2$ ) を計算することで、フォトニック結晶導波路デバイス構造の特性を得ることができる。ただし、本章の定式化では行列の要素数が、例えば  $\mathbf{S}_{q,11}$  では、 $L(2N+1)$  行  $L(2N+1)$  列などとなる。

### 4.3 数値例

この節では、本章で提案した手法の有効性を確認するために、いくつかの構造に対する数値計算結果を示す。計算結果は全て TM 波入射によるものである。

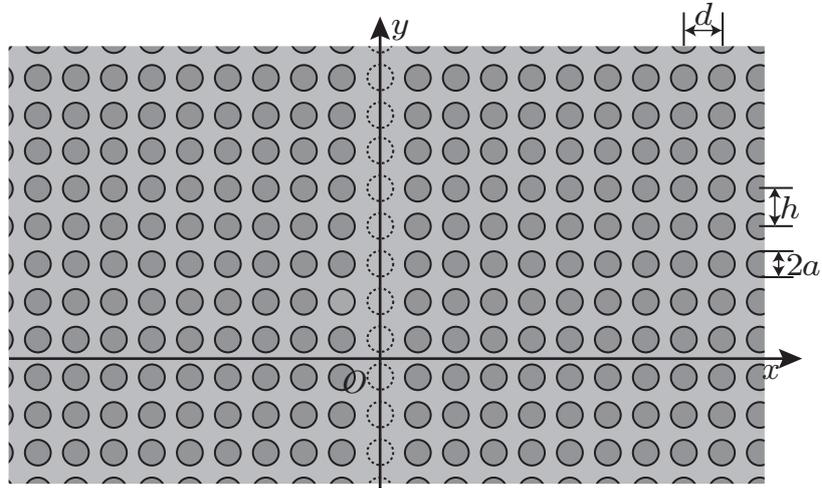
まず、結合フォトニック結晶導波路について伝搬する Floquet モードを計算し、文献に掲載されている数値と比較し議論する。次に、いくつかのフォトニック結晶導波路デバイス構造について計算を行い、計算結果の妥当性を議論する。

### 4.3.1 直線導波路の Floquet モード

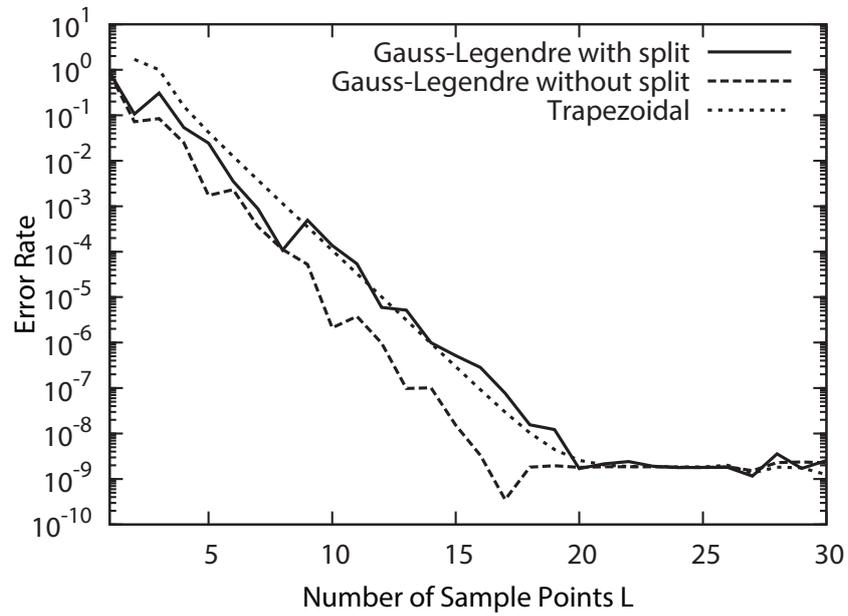
この節では、提案手法の有効性を確認するために、図 4.2(a) のようなフォトニック導波路構造における伝搬定数を、文献 [5] に示されている手法で計算した値と比較する。入射波の波長を  $\lambda_0 = 1550 \text{ nm}$  とし、背景媒質と円柱の誘電率をそれぞれ  $\varepsilon_s = \varepsilon_0$ 、 $\varepsilon_c = 11.56 \varepsilon_0$ 、透磁率をそれぞれ  $\mu_s = \mu_c = \mu_0$  とする。また、格子定数を  $d = h = 0.34 \lambda_0$ 、円柱の半径  $a = 0.2 d$  とする。この条件において伝搬する Floquet モードは、 $2.210670792 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$  である。これらの値を参照値として、打ち切り次数によって伝搬定数の誤差率がどのように変化するかを図 4.2(b) に示した。ただし、平面波展開および円筒波展開の展開次数は、それぞれ  $N = 3$ 、 $K = 4$  とし、計算を行っている。実線は、数値積分スキームとして Gauss-Legendre 法を用いた場合の結果である。但しこの結果は、積分区間を Wood-Rayleigh アノマリの起きる個所で分割し、それぞれの区間で Gauss-Legendre 法を用いて標本点とそれに関する重みを決定した場合の結果である。また、破線と点線はそれぞれ、数値積分スキームに関して Gauss-Legendre 法を前述の分割をせずに用いた場合と、台形則を用いた場合の結果である。Wood-Rayleigh アノマリは  $\alpha_n(\xi)$  と背景媒質中の波数  $k_s$  が等しくなる場合に発生し、一般的にはアノマリが発生する前後で回折界の強度が急激に変化する。したがって、 $\xi$  について数値積分を行う際にはアノマリの発生する  $\xi$  の値で積分区間を分割し、各区間で数値積分を行うほうが良い [27]。しかし、今回の計算例においては、積分区間の分割を行わなくても十分な精度の計算結果を得ることが出来ている。

### 4.3.2 導波路デバイス構造の伝搬特性

この節では、いくつかの基本的なフォトニック結晶導波路デバイス構造に対して、提案手法による数値計算結果を示す。ここでは入力用導波路として、 $y < 0$  の領域において 1 本の単一モード直線導波路を  $y$  軸と平行に設けることにし、入射



(a)



(b)

図 4.2: 直線状フォトニック結晶導波路の構造 (a) と標本点数による伝搬定数の誤差率 (b)

波はこの導波路を  $+y$  方向に伝搬する基本導波モードとし、前章と同様の計算を行うことによって、透過電力と反射電力を計算することができる。

背景媒質と円柱の誘電率をそれぞれ  $\varepsilon_s = \varepsilon_0$ 、 $\varepsilon_c = 12.25\varepsilon_0$ 、透磁率をそれぞれ  $\mu_s = \mu_c = \mu_0$  とする。また、格子定数を  $d = h = 340\text{ nm}$ 、円柱の半径  $a = 0.2d$  とする。これらの値を用いた単一の直線欠陥による導波路は単一 Floquet モードを有する。これから示す数値計算結果は、数値積分スキームとして Gauss-Legendre 法を用い、積分区間を Wood-Rayleigh アノマリの起きる個所で分割したものである。ここで、数値積分スキームの標本点数は  $L = 32$ 、Lattice sums の積分範囲の上限を  $b = 20$  とした。

図 4.3 は、直線導波路に強結合共振器を有するフォトニック結晶導波路フィルタの構造である。入出力部の領域は単一の直線導波路となっており、遷移領域は第 2 層のみ欠陥を設けている ( $\mathcal{D}^{(2)} = \{0\}$ )。この構造において、標本点数を変化させたときの反射透過特性を図 4.4 に示す。ここでは、平面波展開と円筒波展開の次数を  $N = K = 1$  とする。この結果より、平面波、円筒波ともに展開次数が  $\pm 1$  項で計算ができていることがわかる。ただし、標本点数は  $6 \leq L$  としなければ、電力保存則は満足するが、妥当と思われる結果は得られないことが分かる。

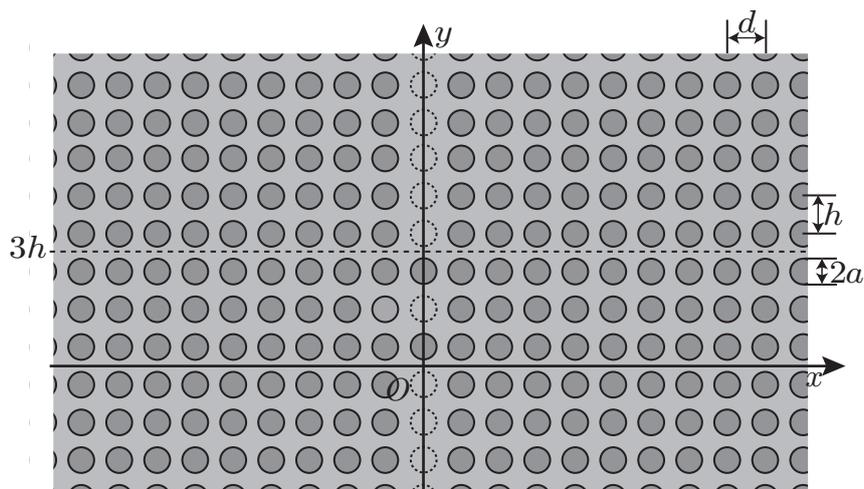
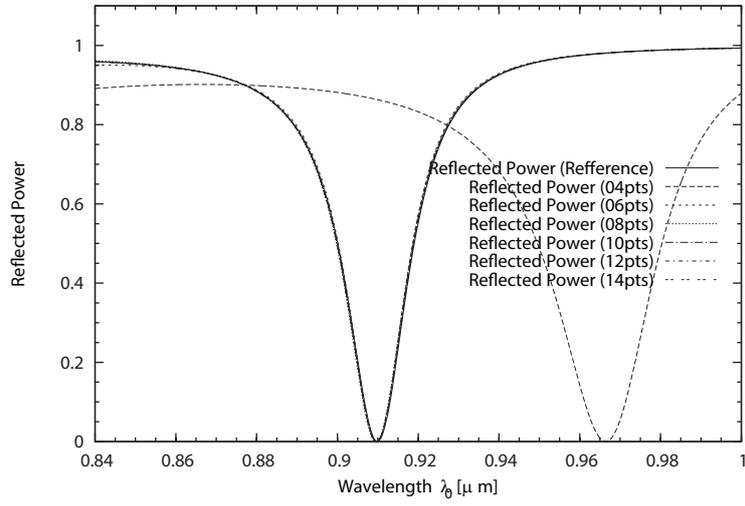
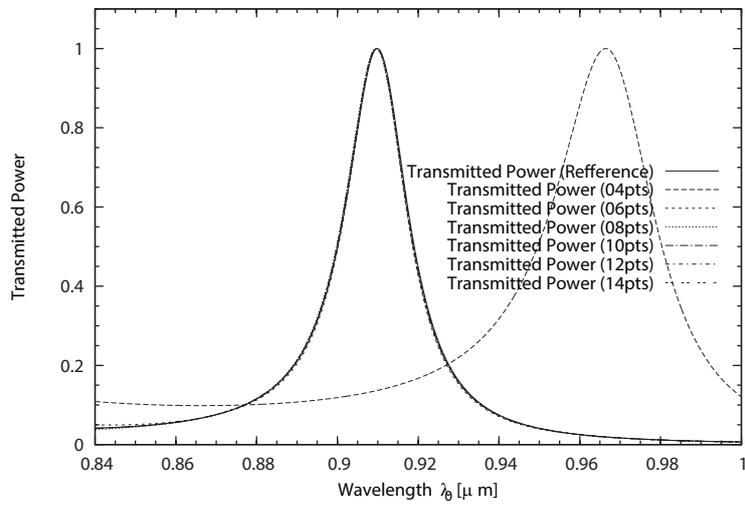


図 4.3: 共振器を有する導波路 (強結合の場合) の構造



(a)



(b)

図 4.4: 共振器を有する導波路 (弱結合の場合) における標本点数の変化による反射特性 (a) と及び透過特性 (b)

図 4.5 は、直線導波路に弱結合共振器を有するフォトニック結晶導波路フィルタ構造である。ただし、円柱などのパラメータは強結合共振器の場合と同じとする。この構造において、平面波展開と円筒波展開の次数を  $N = K = 1$  とし、標本点数を変化させたときの反射透過特性を図 4.6 に示す。弱結合共振器についても強結合共振器と同様に、平面波、円筒波ともに展開次数が  $\pm 1$  項で計算ができていることがわかる。この場合でも標本点数は  $6 \leq L$  としなければ、電力保存則は満足するが、妥当と思われる結果は得られないことが確認できる。前章と同様に、この節で計算した構造を構成する円柱の断面積は、文献 [25] で用いられている角柱の断面積と等しくなるように与えており、文献による計算結果と同じ特性を得ることが確認できた。

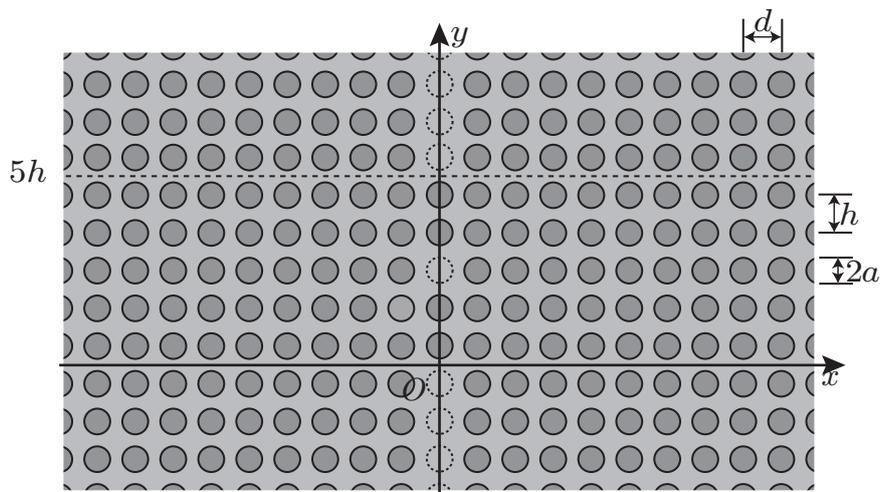
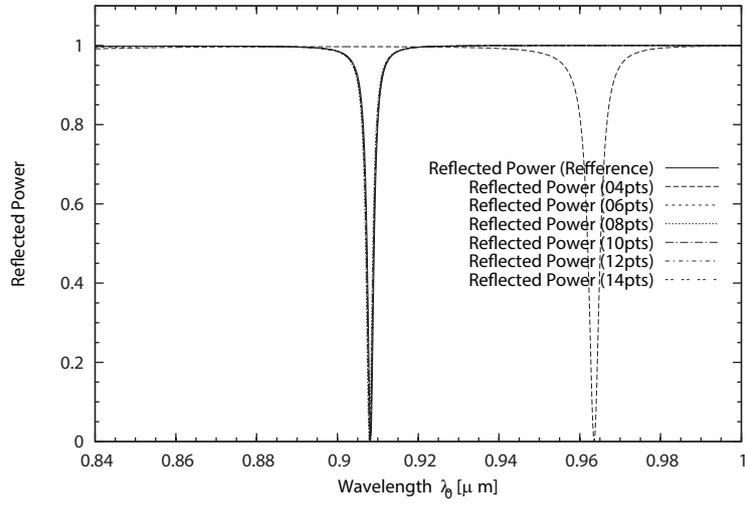
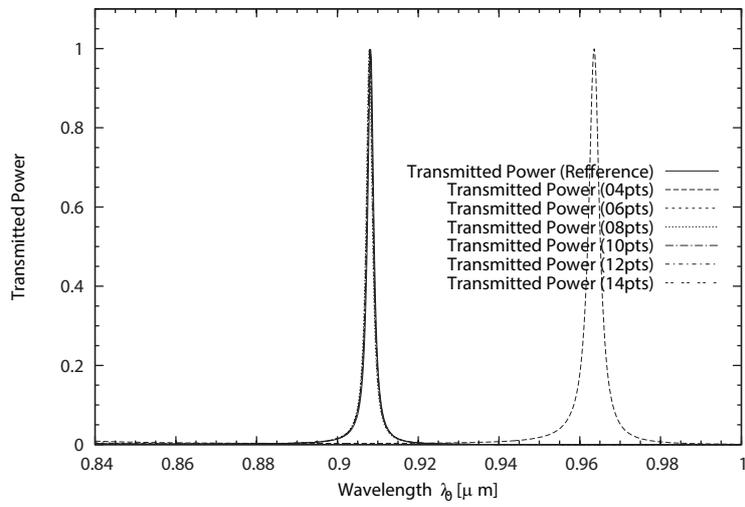


図 4.5: 共振器を有する導波路 (弱結合の場合) の構造



(a)



(b)

図 4.6: 共振器を有する導波路 (弱結合の場合) における標本点数の変化による反射特性 (a) と及び透過特性 (b)

## 4.4 まとめ

本章では、円柱により構成された2次元フォトニック結晶導波路デバイスを、スペクトル領域法を使用した解析手法を提案し、いくつかの構造に対する反射及び透過特性を示し、提案手法の妥当性を示した。考察対象とした構造は、前章と同様な、入出力用の直線状フォトニック結晶導波路間に適当な欠陥が存在する部分があるものである。フォトニック結晶導波路を構成する周期セルは、伝搬方向とは垂直な方向には完全な周期構造とはなっていない。そのため擬周期 Fourier 変換を用いることで、変換パラメータによって電磁界は周期性を持つことになる。積分方程式を解くにあたり、変換パラメータに離散化を行った。提案手法では、前章と同様に円柱配列が多層構造をなしているとして構造全体の散乱行列を求めており、各層内の伝搬特性を解析するために、複数円柱による散乱問題を解く手法である RTMA を援用しているが、周期境界条件を使用せずに Floquet モードの導出を行うことができ、導波モードだけではなくエバネッセントモードも求めることができる。本手法においてフォトニック結晶導波路の伝搬定数を求め、他の解析手法で得られた伝搬定数と比較することによって、提案手法の妥当性を示した。また、フォトニック結晶導波路デバイス構造の反射透過特性についても他の手法で得られた結果と比較し、妥当な結果を得ていることが確認できた。

## 第5章 まとめ

本論文では、円柱によって構成されたフォトニック結晶導波路デバイス構造の解析について、複数の散乱体による散乱問題解析手法である RTMA を用いて、周期境界条件を用いる手法と、周期境界条件を陽に用いないスペクトル領域法を用いる手法、それぞれの定式化を行い、提案手法の妥当性を示した。

周期境界条件を用いる手法では、フォトニック結晶導波路デバイス構造について、Fourier 級数展開法と多層構造の解析手法を併用した定式化を行い、妥当性を示している。この定式化では、電磁界の主たる伝搬方向と垂直に仮想周期を導入する。円柱配列が電磁界の導波方向に多層構造をなしていると考え、構造全体の伝搬特性を各層の縦続接続により得ることができるものである。周期境界条件を陽に用いないスペクトル領域法を用いる手法においても、フォトニック結晶導波路デバイス構造について定式化を行い、妥当性を示した。この手法では、波数空間において離散化を行うために擬周期 Fourier 変換を使用しており、周期境界条件を使用せずに導波路の Floquet モードの導出を行うことができている。

周期境界条件を用いる場合と比較して、スペクトル領域法を用いた場合、平面波展開と円筒波展開の両方において、 $\pm 1$  次のみで必要な精度の計算ができていることは大変興味深い結果となった。ただし、標本点の数が少ない場合には、電力保存則を満たす結果が得られているにもかかわらず妥当な結果を得ることができない場合があり注意が必要である。

# 謝辞

本研究を遂行し、学位論文にまとめるにあたり、様々な方々からご助力を頂きました。研究室に配属されてからの6年間、研究に関してだけでなく、その他さまざまなことについてご鞭撻いただいた、工学研究科知能情報システム工学専攻

渡辺仰基教授に心より感謝いたします。ご多忙の中、内田一徳教授、前田洋教授、朱世杰教授より本論文についての助言を頂きました。その他、情報工学部情報通信工学科の各先生方にも、様々な場面で見識を広げるきっかけを頂きました。

この論文は、各位の多大な力添えによりまとめることができました。この場をお借りして、皆様に厚く御礼申し上げます。

## 参考文献

- [1] M. Koshiba., Y. Tsuji, and M. Hikari, “Time-domain beam propagation method and its application to photonic crystal circuits,” *J. Lightwave Technol.*, Vol. 18, No. 1, pp. 102–110, 2000.
- [2] Taflove, A., *Computational Electrodynamics: The Finite-difference Time-domain Method*, Artech House, Boston, 1995.
- [3] J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, and J. N. Winn, *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*, Princeton University Press, Princeton, 1995.
- [4] H. Tanaka, T. Yamasaki, and T. Hosono, “Propagation characteristics of dielectric waveguides with slanted grating structure,” *IEICE Trans. Electron.*, Vol. E77-C, No. 11, pp. 1820–1827, 1994.
- [5] K. Yasumoto, H. Jia, and S. Kai, “Rigorous analysis of two-dimensional photonic crystal waveguides,” *Radio Science*, Vol. 40, No. 6, 2005.
- [6] H. Jia and K. Yasumoto, “Modal analysis of two-dimensional photonic-crystal waveguides formed by rectangular cylinders using an improved Fourier series method,” *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, Vol. 54, No. 2, pp. 564–571, 2006.
- [7] L. Li, “Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings,” *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 13, No. 5, pp. 1024–1035, 1996.

- [8] T. Hosono, T. Hinata, and A. Inoue, “Numerical analysis of the discontinuities in slab dielectric waveguides,” *Radio Sci.*, Vol. 17, No. 1, pp. 75–83, 1982.
- [9] 山北, 松本, 六島, “異方性誘電体導波路における不連続部の解析,” *電気学会研究会資料*, EMT-93-87, pp. 81–90, 1993.
- [10] K. Yasumoto, T. Miyamoto, and M. Momoda, “Full-wave analysis of optical waveguides using periodic boundary conditions,” *Proc. SPIE*, Vol. 3666, pp. 170–176, 1999.
- [11] Z. Y. Li, and K. M. Ho, “Light propagation in semi-infinite photonic crystal and related waveguide structures,” *Physical Review B*, Vol. 68, p. 155101, 2003.
- [12] K. Watanabe and K. Yasumoto, “Accuracy improvement of the Fourier series expansion method for Floquet-mode analysis of photonic crystal waveguides,” *Progress In Electromagnetics Research*, Vol. 92, pp. 209–222, 2009.
- [13] K. Yasumoto and H. Toyama, “Formulation for electromagnetic scattering and guidance by two-dimensional photonic crystals,” *IEICE Technical Report*, OPE2001-93, 2001.
- [14] K. Yasumoto and K. Watanabe, “Analysis of discontinuities in two-dimensional photonic crystal waveguides using Floquet modes concept,” *Int. J. Microwave and Opt. Technol.*, Vol. 3, No. 3, pp. 397–403, 2008.
- [15] K. Yasumoto and K. Watanabe, “Analysis of discontinuities in two-dimensional photonic crystal waveguides using floquet Modes Concept,” *Int. J. Microwave and Opt. Technol.*, Vol. 3, No. 3, pp. 397–403, 2008.
- [16] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1990.

- [17] D. Felbacq, G. Tayeb, and D. Maystre, “Scattering by a random set of parallel cylinders,” *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 11, No. 9, pp. 2526–2538, 1994.
- [18] K. Watanabe and Y. Nakatake, “Floquet-mode analysis of two-dimensional photonic crystal waveguides formed by circular cylinders using periodic boundary conditions,” *IEICE Trans. Electron.*, Vol. E93-C, No. 1, pp. 24-31, Jan. 2010.
- [19] Y. Nakatake and K. Watanabe, “Numerical analysis of two-dimensional photonic crystal waveguide devices using periodic boundary conditions,” *IEICE Trans. Electron.*, Vol. E94-C, No. 1, pp. 32–38, 2011.
- [20] K. Watanabe and Y. Nakatake, “Spectral-domain formulation of electromagnetic scattering from circular cylinders located near periodic cylinder array,” *Progress In Electromagnetics Research B*, Vol. 31, pp. 219-237, Jun. 2011.
- [21] Y. Nakatake and K. Watanabe, “Spectral-domain formulation of pillar-type photonic crystal waveguide devices of infinite extent,” *Progress in Electromagnetics Research*, Vol. 143, pp. 447-461, Nov. 2013.
- [22] M. Abramowitz, and I. A. Stegun, “Bessel functions of integer order,” *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, p. 363, Dover Publications, New York, 1972.
- [23] H. Roussel, W. C. Chew, F. Jouvie, and W. Tabbara, “Electromagnetic scattering from dielectric and magnetic gratings of fibers — a t-matrix solution,” *J. Electromagnetic Waves and Appl.*, Vol. 10, No. 1, pp. 109–127, 1996.
- [24] K. Yasumoto and K. Yoshitomi, “Efficient calculation of lattice sums for free-space periodic green’s function,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 47, No. 6, pp. 1050–1055, 1999.

- [25] K. Yasumoto and K. Watanabe, “Numerical modeling of photonic crystal circuits using fourier series expansion method based on floquet modes,” *Passive Microwave Components and Antennas*, Edited by V. Zhurbenko, Chap. 5, InTech, Vukovar, 2010.
- [26] J. Zhou, Q. Chang, D. Mu, J. Yang, W. Han and L. Wang, “Theoretical investigation of waveguide power splitters with parallel output ports in two-dimensional square-lattice photonic crystals,” *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol. 26, No. 12, pp. 2469–2472, 2009.
- [27] K. Watanabe and K. Yasumoto, “Two-dimensional electromagnetic scattering of non-plane incident waves by periodic structures,” *Progress In Electromagnetics Research*, Vol. 74, pp. 241–271, 2007.